Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Cerraduras de subgrupos y otros aspectos en grupos paratopológicos

Tesis que presenta

Manuel Fernández Villanueva Medina

Para obtener el grado de

Doctor en Matemáticas

Asesor de tesis: Dr. Mikhail Tkachenko

Sinodales:

Dr. Richard Gordon Wilson Roberts

Dr. Vladimir Tkachuk Vladimirovich

Dr. Mikhail Tkachenko Gelievich

Dr. Salvador García Ferreira

Dr. Ángel Tamariz Mascarúa

Mxico, D.F., 17 de diciembre de 2014

Contenido

CAPÍTULO 1

Resumen

En esta tesis trabajamos principalmente con grupos paratopológicos. Algunos resultados son válidos para grupos con estructuras topológicas más débiles, en esos casos enunciamos las proposiciones para esas estructuras.

Un *grupo paratopológico* (G, τ) consiste en un grupo abstracto G junto con una topología τ que hace continua a la multiplicación de G. Si además la inversión en G es continua, entonces (G, τ) es un *grupo topológico*.

Una parte de esta tesis está dedicada al estudio de las cerraduras de subgrupos en grupos paratopológicos. Llamaremos *grupos-SP* a los grupos con una topología tales que la cerradura de cualquier subgrupo es nuevamente un subgrupo. El capítulo 3 trata sobre los grupos-SP. Un grupo con una topología es *semitopológico* si todas las traslaciones izquierdas y derechas son continuas. Un grupo G con una topología es precompacto si para cada vecindad abierta del neutro de G existe un subconjunto finito F de G tal que $UF = G = FU$. Si todos los subgrupos cíclicos de un grupo semitopológico G son precompactos entonces G es un grupo-SP.

En la sección 3.3 probamos que bajo ciertas condiciones, la topología de un grupo paratopológico abeliano puede ser refinada de tal manera que el grupo con la nueva topología es nuevamente un grupo paratopológico que no es un grupo-SP (ver proposiciones 3.3.2 y 3.3.3, y corolario 3.3.4). De hecho, se refina la topología de un grupo paratopológico G dado declarando abierto un 'único' subsemigrupo del grupo. En la sección 3.4 presentamos cuatro ejemplos que aparecen en [**15**], en cada uno de los cuales se refina la topología usual del grupo del círculo. En cada caso verificamos si el grupo paratopológico obtenido con el refinamiento es un grupo-SP.

En el capítulo 4 trabajamos con los grupos *casi topológicos*, cuya definición se encuentra en el sumario de definiciones. Probamos que la clase de los grupos casi topológicos es cerrada bajo cocientes y al tomar subgrupos, y no es cerrada al tomar productos.

Un grupo paratopológico G es *saturado* si para cualquier vecindad U del neutro de G el conjunto U^{-1} tiene interior no vacío. Demostramos que cualquier producto Π de grupos casi topológicos es un grupo-SP y que cualquier subgrupo de Π es saturado.

Para algunas propiedades topológicas $\mathcal{P}$ probamos que un grupo casi topológico G tiene $\mathcal{P}$ si y sólo si el grupo topológico $\hat{G}$ subyacente en G también tiene $\mathcal{P}$, ver el párrafo que sigue a la definición 4.1.1. Las propiedades en cuestión son la precompacidad, la propiedad de Baire, el índice de estrechez, la celularidad, la densidad y el π-peso.

Un espacio topológico X con una topología es *tenuemente compacto* si cada familia localmente finita de abiertos no vacíos de X es finita. En el capítulo 5 probamos que cualquier subconjunto G_δ-denso de un grupo paratopológico tenuemente compacto es tenuemente compacto. En particular, todo subgrupo G_δ-denso de un grupo paratopológico tenuemente compacto es tenuemente compacto.

Un subconjunto C de un espacio topológico X es *cerrado regular* de X si $C = \overline{intC}$. Un espacio X es *perfectamente κ-normal* si cada conjunto cerrado regular de X es un conjunto-cero de X. En la sección 5.2 probamos que cualquier grupo paratopológico tenuemente compacto es perfectamente κ-normal.

Finalmente, en el capítulo 6 consideramos subconjuntos compactos de grupos paratopológicos y la acción de automorfismos internos sobre vecindades abiertas del neutro. Es sabido que para un subconjunto compacto (incluso precompacto) B de un grupo topológico G, y una vecindad arbitraria U del neutro e de G, existe una vecindad V de e tal que $bVb^{-1} \subseteq U$, para cada $b \in B$. En el ejemplo 6.2.1 probamos que esta propiedad no se cumple en la clase de los grupos paratopológicos de Hausdorff.

CAPÍTULO 2

Introducción

Sea G un grupo con una topología. El grupo G es *topológico izquierdo* (*topológico derecho*) si las traslaciones izquierdas (derechas) son continuas en G. Un grupo G que es a la vez topológico izquierdo y derecho es un *grupo semitopológico*. Si la multiplicación en G es continua, decimos que G es un *grupo paratopológico*. Si además la inversión es continua en G, entonces G es un *grupo topológico*.

Diremos que un grupo G con una topología es un *grupo-SP* si la cerradura de cualquier subgrupo de G es nuevamente un subgrupo de G. Todos los grupos topológicos son grupos-SP. Esto ya no lo cumplen los grupos paratopológicos, como se muestra en el ejemplo 3.1.1 de este trabajo o en el ejemplo 4.17 de [**2**]. Una buena parte de esta tesis está relacionada con el estudio de la cerradura de subgrupos en un grupo paratopológico, en particular todo el capítulo 3.

Un grupo G con una topología es *precompacto* si para cada vecindad U del neutro existe un subconjunto finito F de G tal que $FU = G = UF$. Una condición suficiente para que un grupo semitopológico G sea un grupo-SP es que todos sus subgrupos cíclicos sean precompactos izquierdos, esto lo demostramos en el corolario 3.2.6 de la sección 3.2.

Si un grupo paratopológico abeliano G tiene un subconjunto independiente K (ver definición 3.3.1 y párrafo que le sigue) de elementos de orden infinito que se acumulan en el neutro de G, entonces la topología de G puede ser refinada por una topología de grupo paratopológico σ de tal forma que (G, σ) no es un grupo-SP. En particular existe una topología σ para el grupo aditivo $\mathbb{R}$, más fina que la topología usual, tal que $(\mathbb{R}, \sigma)$ no es un grupo-SP.

En su artículo [**15**], con fines distintos al estudio de las cerraduras de los subgrupos, Ravsky define cuatro topologías que refinan a la topología usual del grupo del círculo. Con cada una de esas topologías verificamos si el grupo paratopológico obtenido con el refinamiento es un grupo-SP.

El capítulo 4 trata de los grupos casi topológicos, definidos por el autor en [**8**]. La base usual para la topología de la recta de Sorgenfrey S, que es un grupo paratopológico, está formada por todos los intervalos semi-abiertos de la forma $[a, b)$, con a y b números reales y $a < b$. Si removemos el extremo izquierdo de cualquiera de estos intervalos, obtenemos un abierto básico (a, b) del grupo topológico $\mathbb{R}$ con su topología usual. Con esto en mente se define la clase de los grupos casi topológicos (definición 4.1.1). En la sección 4.2 probamos que la clase de los grupos casi topológicos preserva cocientes, y antes, en el ejemplo 4.1.6 mostramos que el producto de dos grupos casi topológicos no es necesariamente un grupo casi topológico. En el teorema 4.4.6 probamos que cualquier producto topológico Π de grupos casi topológicos es un grupo-SP, este resultado generaliza el resultado principal de [**18**], en el cual se demuestra que cualquier potencia S^κ de la recta de Sorgenfrey es un grupo-SP.

Un grupo paratopológico es *saturado* si para cada vecindad U del neutro de G el conjunto U^{-1} tiene interior no vacío. En la sección 4.3 se prueba que cualquier subgrupo de un producto de grupos casi topológicos es saturado. En la sección 4.5 demostramos que un grupo casi topológico G es precompacto (o de Baire) si y sólo si el grupo topológico subyacente $\hat{G}$ tiene la misma propiedad (ver el párrafo que sigue a la definición 4.1.1). También se demuestra que los índices de estrechez de G y $\hat{G}$ coinciden.

El capítulo 5 trata de los grupos tenuemente compactos. Un espacio *tenuemente compacto* es un espacio topológico en el cual cada familia localmente finita de conjuntos abiertos es finita, un espacio topológico X de Tychonoff es *pseudocompacto* si cada función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es continua. En los espacios de Tychonoff los conceptos de pseudocompacidad y compacidad tenue coinciden. Se sabe que cada grupo paratopológico pseudocompacto (por lo tanto de Tychonoff) es un grupo topológico [**16**, teorema 2.6]. Este resultado también es válido para grupos paratopológicos regulares tenuemente compactos [**1**, teorema 1.7]. Sin embargo, un grupo paratopológico tenuemente compacto de Hausdorff puede no ser un grupo topológico, [**15**, ejemplo 3].

Un conjunto A de un espacio topológico X es *G_δ-denso* en X si la intersección de cualquier conjunto G_δ no vacío de X con A es distinta del vacío. En la proposición 5.1.10 demostramos que cualquier subespacio G_δ-denso de un grupo paratopológico tenuemente compacto es tenuemente compacto.

Un espacio X es *perfectamente κ-normal* si cada subconjunto cerrado regular de X es un conjunto-cero en X. En la proposición 5.2.5 probamos que todo grupo paratopológico tenuemente compacto es perfectamente κ-normal.

Una pregunta natural es ¿Bajo qué condiciones un grupo paratopológico es un grupo topológico? Un *grupo semitopológico* es un grupo junto con una topología que hace continuas las traslaciones izquierdas y derechas. Los grupos paratopológicos son grupos semitopológicos. En 1936, D. Montgomery [**12**], demostró que cada grupo semitopológico separable que es metrizable por una métrica completa es un grupo topológico. Otro resultado temprano de este tipo fue obtenido por R. Ellis en [**7**]. Ellis probó que cualquier grupo semitopológico localmente compacto de Hausdorff es un grupo topológico. En 1960, W. Zelazko demostró en [**20**] que cualquier grupo paratopológico completamente metrizable es un grupo topológico. En 1982, N. Brand [**6**] mostró que cada grupo paratopológico Čech-completo es un grupo topológico. Reznichenko probó en [**16**] que cada grupo paratopológico pseudocompacto es un grupo topológico. Arhangel'skii y Reznichenko establecen en [**1**] algunas condiciones suficientes para que un grupo paratopológico sea grupo topológico, generalizando el resultado de [**16**]. En la proposición 5.2.6 demostramos que si cada subgrupo cíclico de un grupo paratopológico tenuemente compacto G de Hausdorff es precompacto, entonces G es un grupo topológico.

Un subconjunto A de un grupo paratopológico G es invariante si para cada $x \in G$ se tiene la igualdad $x^{-1}Ax = A$. Un grupo paratopológico G es balanceado si tiene una base local en el neutro consistente en conjuntos invariantes. Un subconjunto B de un grupo semitopológico G es precompacto si para toda vecindad U del neutro de G existe un subconjunto finito F de G tal que $B \subseteq FU$ y $B \subseteq UF$. En tal caso, el conjunto F puede formarse con elementos de B. El siguiente lema [**2**, lema 3.7.8] se utiliza en la demostración de que todo grupo topológico precompacto es balanceado.

LEMA 2.0.1. *Sea B un subconjunto precompacto de un grupo topológico G. Entonces para cada vecindad U del neutro e de G existe una vecindad V de e tal que para todo $b \in B$ se cumple $bVb^{-1} \subseteq U$.* □

En el ejemplo 6.2.1 mostramos que este lema no se puede generalizar a la clase de los grupos paratopológicos de Hausdorff.

2.1. Preliminares

Esta sección contiene notación y algunos resultados conocidos que serán utilizados en este trabajo.

Si X es un espacio topológico y $A \subseteq X$, la cerradura de A en X será denotada como $\overline{A}^X$ ó $\overline{A}$, también como $cl_X A$ ó clA. El interior de A será denotado como $int_X A$, ó simplemente $intA$. Dado un grupo G y un subconjunto T no vacío de G, denotamos como $\langle T \rangle$ al subgrupo de G generado por T; si $T = \{x\}$, escribimos $\langle x \rangle$ en lugar de $\langle \{x\} \rangle$. Si G es un grupo y $x \in G$, denotamos como S_x al menor subsemigrupo de G que contiene a x (ver definición 2.1.6).
El símbolo ω denota al primer cardinal infinito, $\mathbb{N}$ a los enteros positivos.

DEFINICIÓN 2.1.1. *Si G es un grupo con una topología y $g \in G$ entonces las funciones $\lambda_g : G \to G : \lambda_g(x) = gx$ y $\rho_g : G \to G : \rho_g(x) = xg$ son llamadas traslación izquierda y traslación derecha de G por g, respectivamente.*

DEFINICIÓN 2.1.2. *Un grupo G con una topología es un grupo semitopológico si todas las traslaciones izquierdas y derechas de G son continuas.*

PROPOSICIÓN 2.1.3. *Sea G un grupo semitopológico. Entonces todas las traslaciones, derechas e izquierdas de G, son homeomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in G$ un elemento arbitrario. Se tiene que $\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = I_G$ y $\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g = I_G$, donde $I_G : G \to G$ es la función identidad. De aquí se concluye que λ_g es un homeomorfismo. Gomo $g \in G$ era un elemento arbitrario, concluimos que todas las traslaciones izquierdas de G son homeomorfismos. La prueba para las traslaciones derechas es análoga. □

DEFINICIÓN 2.1.4. *Un espacio topológico X es homogéneo si para cualquier par de puntos x, y de X existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.*

PROPOSICIÓN 2.1.5. *Sea G un grupo semitopológico. Entonces G es un espacio homogéneo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in G$. Por la proposición 2.1.3 la traslación izquierda $\lambda_{yx^{-1}} : G \to G$ es un homeomorfismo, y $\lambda_{yx^{-1}}(x) = y$. □

DEFINICIÓN 2.1.6. *Un conjunto S distinto del vacío con una operación binaria asociativa $\circ : S \times S \to S$ es llamado semigrupo. Un subconjunto S distinto del vacío de un grupo G es llamado subsemigrupo de G si S es un semigrupo con la operación de G restringida a S.*

PROPOSICIÓN 2.1.7. *Sea G un grupo semitopológico y H un subgrupo de G. Entonces $\overline{H}$ es un subsemigrupo de G.*

DEMOSTRACIÓN. El conjunto $\overline{H}$ no es vacío por ser H un subgrupo de G. Sean $x, y \in \overline{H}$, e el neutro de G y $U \in \mathcal{N}(e)$. Probaremos que $xyU \cap H \neq \emptyset$. Por ser G un grupo semitopológico, las traslaciones izquierdas son funciones abiertas, entonces el conjunto yU es una vecindad abierta de y. Como $y \in \overline{H}$, existe $h \in yU \cap H$. Se sigue que $xh \in xyU$. Como las traslaciones derechas son continuas, existe una vecindad abierta V de x tal que $Vh \subseteq xyU$. Dado que $x \in \overline{H}$ y $V \in \mathcal{N}(x)$, existe $h' \in V \cap H$. Entonces $h'h \in Vh \subseteq xyU$. Por ser H un subgrupo de G se tiene que $h'h \in H$. De aquí que $xyU \cap H \neq \emptyset$. Concluimos que $xy \in \overline{H}$. □

La siguiente proposición es conocida y muy útil. En ésta se establece que para definir una topología de grupo paratopológico en un grupo dado G, es suficiente definir una familia de subconjuntos de G que al cumplir ciertas condiciones será una base local en el neutro para una topología de grupo paratopológico en G. El enunciado original de esta proposición es para grupos topológicos, puede verse su prueba en [**2**, proposición 1.3.12], y las condiciones que aparecen en ésta son llamadas por algunos autores *condiciones de Pontryagin* [**13**].

PROPOSICIÓN 2.1.8. *Para un grupo paratopológico (G, τ) cualquier base local $\mathcal{B}$ en el neutro de G satisface las siguientes condiciones:*

a) Para cualquier par de elementos $U, V \in \mathcal{B}$ existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq U \cap V$,
b) Dados $U \in \mathcal{B}$ y $x \in U$ cualesquiera, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $xV \subseteq U$,
c) Dado cualquier $U \in \mathcal{B}$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^2 \subseteq U$,
d) Dados $U \in \mathcal{B}$ y $x \in G$ cualesquiera, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x^{-1}Vx \subseteq U$.

Recíprocamente, si una familia no vacía $\mathcal{B}$ de subconjuntos de G, cada uno de los cuales contiene al neutro, satisface las condiciones (a)-(d) entonces cada una de las familias

$\mathcal{C} = \{xU : x \in G, U \in \mathcal{B}\}$ *y* $\mathcal{D} = \{Ux : x \in G, U \in \mathcal{B}\}$

es base para una topología τ de grupo paratopológico en G para la cual $\mathcal{B}$ es una base local en el neutro.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que (G, τ) es un grupo paratopológico y $\mathcal{B}$ una base local del neutro. Probamos que se cumplen las condiciones (a)-(d):

(a) Si $U, V \in \mathcal{B}$, el conjunto $U \cap V$ es una vecindad abierta del neutro e de G. Por ser $\mathcal{B}$ una base local en e, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq U \cap V$.

(b) Sean $U \in \mathcal{B}$ y $x \in U$. El conjunto $x^{-1}U$ es una vecindad abierta de e, como la multiplicación en G es continua y $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ es una base de $G \times G$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^2 \subseteq x^{-1}U$. Esto implica que $xV \subseteq xV^2 \subseteq U$.

(c) Si U es cualquier elemento en $\mathcal{B}$, usando el mismo razonamiento que en (b) se prueba que existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^2 \subseteq U$.

(d) Sean $U \in \mathcal{B}$ y $x \in G$. Como las traslaciones en G son funciones abiertas y $e \in xUx^{-1}$, xUx^{-1} es una vecindad abierta de e en G. Por ser $\mathcal{B}$ una base local en e existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq xUx^{-1}$. De aquí se concluye que $x^{-1}Vx \subseteq U$.

Con esto queda demostrada la primera parte de la proposición. Ahora supongamos que $\mathcal{B}$ es una familia no vacía de subconjuntos de G, cada uno de los cuales contiene a e, que satisface las condiciones (a)-(d). Voy a probar que $\mathcal{C} = \{xU : x \in x, U \in \mathcal{B}\}$ es base para una topología de grupo paratopológico en G.

Probaremos que $\mathcal{C}$ satisface las dos condiciones que debe cumplir una familia de subconjuntos de G para ser base de una topología τ en G:

(i) Sean $xU, yV \in \mathcal{C}$, con $U, V \in \mathcal{B}$, y $z \in xU \cap yV$. De aquí $x^{-1}z \in U$ y $y^{-1}z \in V$. Por la condición (b), Existen $W_1, W_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x^{-1}z \in W_1 \subseteq U$ y $y^{-1}z \in W_2 \subseteq V$. Por la condición (a) existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq W_1 \cap W_2$. De aquí se sigue que $x^{-1}zW \subseteq U$ y $y^{-1}zW \subseteq V$, ó $zW \subseteq xU$ y $zW \subseteq yV$, de donde $zW \subseteq xU \cap yV$. Por la definición de $\mathcal{C}$, $zW \in \mathcal{C}$.

(ii) Sea $x \in G$. Como la familia $\mathcal{B}$ no es vacía, podemos elegir $U \in \mathcal{B}$. Por hipótesis el neutro e pertenece a U, entonces $x \in xU$, y $xU \in \mathcal{C}$. De aquí que $\mathcal{C}$ es una cubierta de G.

Por (i) y (ii), la familia $\mathcal{C}$ es base para una topología τ en G. Afirmamos que τ es una topología de grupo paratopológico en G. Para ello debemos probar que la multiplicación de G es continua:

Sean $x, y, z \in G$ y supongamos que $xy = z$. Una consecuencia de (b) es que cualquier abierto de (G, τ) que contenga a un elemento arbitrario $t \in G$ contiene a un abierto de la forma $tW \in \mathcal{C}$, con $W \in \mathcal{B}$. Sea $zW \in \mathcal{C}$ una vecindad abierta de z, con $W \in \mathcal{B}$. Probaremos que existen U y V en $\mathcal{B}$ tales que $xUyV \subseteq zW$. Como $W \in \mathcal{B}$, por (c) existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^2 \subseteq W$. Por (d) existe $O \in \mathcal{B}$ tal que $z^{-1}Oz \subseteq V$. Tenemos entonces que $z^{-1}OzV = z^{-1}OxyV \subseteq V^2 \subseteq W$. De aquí que $OxyV \subseteq zW$. Nuevamente por (d) existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $xUx^{-1} \subseteq O$. Entonces $xUyV = xUx^{-1}xyV \subseteq OxyV \subseteq zW$. Como U y V son elementos de $\mathcal{B}$, se tiene que $xU, yV \in \mathcal{C}$. Con esto queda probada la continuidad de la multiplicación de G en (G, τ). Por lo tanto τ es una topología de grupo paratopológico en G.

Ahora probaremos que $\mathcal{D}$ es una base para la topología τ. En cualquier grupo grupo paratopológico las traslaciones derechas son funciones abiertas, además $\mathcal{B}$ es una base local para e en (G, τ). Por lo tanto cada elemento de $\mathcal{D}$ es abierto en (G, τ). Consideremos ahora un abierto básico $xU \in \mathcal{C}$ de (G, τ) y un elemento $y \in xU$. Se tiene que $x^{-1}y \in U$. Por (b) existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x^{-1}yW \subseteq U$. De aquí que $yW \subseteq xU$. Por (d) existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $y^{-1}Vy \subseteq W$. Se tiene que $Vy \in \mathcal{D}$, además $Vy = yy^{-1}Vy \subseteq yW \subseteq xU$. Concluimos que $\mathcal{D}$ es una base para (G, τ). $\square$

La proposición correspondiente a la proposición 2.1.8 en grupos topológicos requiere las cuatro condiciones $(a) - (d)$ junto con una nueva condición:

e) Dado cualquier $U \in \mathcal{B}$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.

En algunas construcciones de este trabajo se usan refinamientos de topologías. Si τ y σ son dos topologías en un conjunto X, denotamos como $\tau \vee \sigma$ a la menor topología en X que contiene a τ y a σ. La siguiente proposición aparece en [**13**]:

PROPOSICIÓN 2.1.9. *Sean τ y σ dos topologías de grupo paratopológico en un grupo G, con bases locales $\mathcal{B}_\tau$ y $\mathcal{B}_\sigma$ en el neutro e de G, respectivamente. Entonces $\mathcal{B} = \{U \cap V : U \in \mathcal{B}_\tau, V \in \mathcal{B}_\sigma\}$ es una base local en e para la topología de grupo paratopolíco $\tau \vee \sigma$ en G.*

CAPÍTULO 3

Grupos-SP

3.1. Definiciones, notación y terminología

Sea G un grupo con una topología. El grupo G es *topológico izquierdo* (*topológico derecho*) si las traslaciones izquierdas (derechas) son continuas en G. Un grupo G que es a la vez topológico izquierdo y derecho es un *grupo semitopológico*. Si la multiplicación en G es continua, decimos que G es un *grupo paratopológico*. Si además la inversión es continua en G, entonces G es un *grupo topológico*.
Los grupos topológicos tienen la propiedad de que la cerradura de cualquier subgrupo es nuevamente un subgrupo. Esta propiedad ya no la cumplen los grupos paratopológicos, como lo muestra este sencillo ejemplo:

EJEMPLO 3.1.1. *Sea $\mathbb{R}$ el grupo aditivo de los números reales. La familia $\mathcal{B} = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ es base para una topología τ de grupo paratopológico en $\mathbb{R}$. Sea H el subgrupo $H = \{0\}$. La cerradura de H en $G = (\mathbb{R}, \tau)$ es $\overline{H} = (-\infty, 0]$, que no es un subgrupo de G.* $\square$

El ejemplo 3.1.1 sólo satisface el axioma de separación T_0. En la sección 3.4 presentamos varios ejemplos de grupos paratopológicos de Hausdorff los cuales no cumplen que la cerradura de cada subgrupo sea necesariamente un subgrupo. El hecho de que los grupos paratopológicos no cumplen en general esta propiedad de la cerradura de los subgrupos, que sí cumplen los grupos topológicos, es lo que motiva la definición de grupo-SP.

DEFINICIÓN 3.1.2. *Un grupo paratopológico G es un grupo-SP si la cerradura de cada subgrupo de G es un subgrupo de G.*

DEFINICIÓN 3.1.3. *Un grupo topológico izquierdo (derecho) G es precompacto izquierdo (derecho) si para cada vecindad abierta U del neutro de G existe un subconjunto finito F de G tal que $FU = G$ ($UF = G$). Un grupo semitopológico G es precompacto si es a la vez precompacto izquierdo y derecho.*

3.2. Precompacidad y grupos-SP

PROPOSICIÓN 3.2.1. *Sea G un grupo topológico izquierdo (derecho) tal que cada subgrupo numerable de G es precompacto izquierdo (derecho). Entonces G es precompacto izquierdo (derecho).*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que G no es precompacto izquierdo. Elegimos una vecindad abierta U del neutro de G tal que $FU \neq G$ para cada subconjunto finito F de G. Definimos una familia creciente numerable $\{C_n\}_{n\in\omega}$ de subgrupos numerables de G como sigue: Sea C_0 cualquier subgrupo numerable de G. Una vez definidos los subgrupos

$C_0, \ldots, C_n$ con $C_0 \subseteq \cdots \subseteq C_n$, para cada conjunto finito $F \subseteq C_n$ elegimos $x_F \in G \backslash FU$. Definimos $C_{n+1} = \langle C_n \cup \{x_F : F \subseteq C_n, |F| < \omega\}\rangle$. Sea $C = \bigcup_{n\in\omega} C_n$. Como cada C_n es numerable, el grupo C es numerable. Por hipótesis C es precompacto izquierdo, existe entonces un conjunto finito $F \subseteq C$ tal que $F(U \cap C) = C$. Por otra parte, existe $k \in \omega$ tal que $F \subseteq C_k$. Entonces $x_F \notin FU \supseteq C$, lo que contradice la definición de C. Concluimos que G precompacto izquierdo. □

COROLARIO 3.2.2. *Sea G un grupo semitopológico tal que cada subgrupo numerable de G es precompacto. Entonces G también es precompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Por su definición, los grupos semitopológicos son topológicos izquierdos y derechos. □

Cabe mencionar que un subgrupo de un grupo paratopológico precompacto puede no ser precompacto. Un ejemplo de este hecho es el siguiente. Sea $\mathbb{T}_s$ el grupo del círculo con la topología de Sorgenfrey, es decir, una base local para el neutro 1 de $\mathbb{T}_s$ está formada por los conjuntos $U_n = \{e^{\pi i x} : 0 \leq x < 1/n\}$, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathbb{T}_s$ es un grupo paratopológico conmutativo cero-dimensional (por lo tanto Tychonoff). El grupo paratopológico $\mathbb{T}_s^2$ también es precompacto y contiene al subgrupo cerrado discreto no numerable $\Delta_2 = \{(x, x^{-1}) : x \in \mathbb{T}_s\}$. De aquí se sigue que el subgrupo Δ_2 no es precompacto. Aún más, cualquier grupo abeliano discreto puede sumergirse como subgrupo de un grupo paratopológico precompacto de Hausdorf [**4**, corolario 5].

Dado un elemento x de un grupo paratopológico G, denotamos como S_x al subsemigrupo $\{x^n : n \in \omega\}$ de G. Nótese que S_x contiene al neutro e de G, pues por definición $x^0 = e$.

PROPOSICIÓN 3.2.3. *Supongamos que un grupo semitopológico G no es un grupo-SP. Existe entonces un elemento $x \in G$ de orden infinito tal que el subsemigrupo S_x es abierto en el grupo cíclico $\langle x\rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea H un subgrupo de G tal que $\overline{H}$ no es subgrupo de G. Por ser G un grupo semitopológico, se sigue de la proposición 2.1.7 que $\overline{H}$ es un subsemigrupo de G . Como $\overline{H}$ no es subgrupo de G, existe un elemento $y \in \overline{H}$ tal que $y^{-1} \notin \overline{H}$. Es claro que el subsemigrupo S_y está contenido en $\overline{H}$. Como $y^{-1} \notin \overline{H}$, el elemento y es de orden infinito. Más aún, $y^{-n} \notin \overline{H}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si denotamos al elemento y^{-1} como x, entonces $S = \big(G \backslash \overline{H}\big) \cap \langle x\rangle$ es abierto en $\langle x\rangle$ y $S_x = x^{-1}S$ es abierto en $\langle x\rangle$. □

Decimos que un grupo G con una topología es *topológicamente periódico* si para cada $x \in G$ y para cada vecindad U del neutro de G existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in U$.

COROLARIO 3.2.4. *Cada grupo semitopológico topológicamente periódico es un grupo-SP.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que un grupo semitopológico G no es un grupo-SP. Entonces por la proposición 3.2.3, G tiene un elemento x de orden infinito tal que el subsemigrupo $S_x = \{x^n : n \in \omega\}$ es abierto en el grupo cíclico $\langle x\rangle$. Elegimos un conjunto abierto U in G tal que $U \cap \langle x\rangle = S_x$. Entonces U contiene al neutro de G y $y^n \notin U$ para cada entero positivo n, donde $y = x^{-1}$. Se sigue que el grupo G no es topológicamente periódico. □

El siguiente lema es conocido. Presentamos su demostración para comodidad del lector.

LEMA 3.2.5. *Si todos los subgrupos cíclicos de un grupo semitopológico G son precompactos, entonces G es un grupo topológicamente periódico.*

DEMOSTRACIÓN. Si G no es topológicamente peridico, podemos encontrar una vecindad abierta U del neutro e de G y un elemento $x \in G$ distinto de e tal que $x^n \notin U$, para cada entero positivo n. En particular, el grupo cíclico $\langle x \rangle$ es infinito y el subsemigrupo $S_y = \{y^n : n \in \omega\}$, donde $y = x^{-1}$, es abierto en $\langle y \rangle = \langle x \rangle$. Entonces $FS_y \neq \langle y \rangle$ para cada subconjunto finito no vacío F de $\langle y \rangle$. De hecho, si $k = mín\{n \in \mathbb{Z} : y^n \in F\}$, entonces $y^{k-1} \notin FS_y$. Así, el subgrupo $\langle y \rangle$ de G no es precompacto. □

Combinando el Corolario 3.2.4 con el Lema 3.2.5, obtenemos lo siguiente:

COROLARIO 3.2.6. *Sea G un grupo semitopológico tal que cada subgrupo cíclico de G es precompacto. Entonces G es un grupo-SP.*

3.3. Resultados generales en grupos abelianos

En esta sección presentamos algunos resultados sobre refinamientos de topologías de grupos paratopológicos abelianos, en los cuales el grupo paratopológico obtenido con el refinamiento no es un grupo-SP. Dado un grupo paratopológico G con topología τ y un subsemigrupo S que contiene al neutro e de G, se refina la topología de G de la siguiente manera: Dada una base local $\mathcal{B}$ de e en G, la base en e para el refinamiento τ_S de τ es la familia $\mathcal{B}_S = \{U \cap S : U \in \mathcal{B}\}$. Por la proposición 1.2 de [**13**], τ_s es una topología de grupo paratopológico que refina a τ. Denotamos como G_S al grupo G junto con la topología τ_S. Esto es, $G_S = (G, \tau_S)$. Nótese que si G es primero numerable, el grupo G_S también lo es.

DEFINICIÓN 3.3.1. *Un subconjunto no vacío K de un grupo aditivo abeliano G con neutro 0_G es independiente si para cualquier combinación lineal $n_1k_1 + \cdots + n_rk_r = 0_G$ se tiene $n_1k_1 = \cdots = n_rk_r = 0_G$, donde $n_1, \ldots, n_r$ son enteros y $k_1, \ldots, k_r \in K$.*

Si todos los elementos del conjunto independiente K de la definición 3.3.1 son de orden infinito, la igualdad $n_1k_1 + \cdots + n_rk_r = 0_G$ con $k_i \in K$ y $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, l$, implicará que $n_1 = \cdots = n_l = 0$.

PROPOSICIÓN 3.3.2. *Sea (G, τ) un grupo paratopológico abeliano primero numerable. Si G contiene un subconjunto infinito independiente K de elementos de orden infinito que se acumula en el neutro e de G, entonces G_S no es un grupo-SP para algún subsemigrupo numerable S de G tal que $e \in S$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in K$ un elemento arbitrario y $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una base local en e. Como e es un punto de acumulación del conjunto K, podemos elegir $t_n \in (K \setminus \{x\}) \cap U_n$, para cada $n \in \omega$, con $t_n \neq t_m$ si $n \neq m$. Sea S el subsemigrupo de G generado por el subconjunto $T = \{e\} \cup \{t_n : n \in \omega\}$. Consideremos el grupo G_S. Como K es un subconjunto independiente de G, se tiene la igualdad $\langle x \rangle \cap \langle T \rangle = \{e\}$. Sea $h_n = x + t_n$, para cada $n \in \omega$, y $H = \langle \{h_n : n \in \omega\} \rangle$. Se sigue de la definición de H que $x \in \overline{H}$, aquí la cerradura es tomada en el grupo G_S, pues sea $U_n \cap S$ una vecindad abierta básica de e en G_S, entonces $h_n = x + t_n \in (x + (U_n \cap S)) \cap H$. Ahora pruebo que

$-x \notin \overline{H}$. Supongamos lo contrario, esto es, supongamos que, $-x \in \overline{H}$. Como S es abierto en G_S, $(-x+S) \cap H \neq \emptyset$. Como H es un subgrupo, $-x + l_1 t_{n_1} + \cdots + l_i t_{n_i} = k_1 h_{m_1} + \cdots + k_j h_{m_j}$ para algunos enteros positivos $l_1, \ldots, l_i$, algunos enteros $k_1, \ldots, k_j$ distintos de cero, $n_1, \ldots, n_i \in \omega$ distintos y $m_1, \ldots, m_j \in \omega$ distintos. De aquí se sigue que $(-1 - k_1 - \cdots - k_j)\, x = k_1 t_{m_1} + \ldots k_j t_{m_j} - l_1 t_{n_1} - \cdots - l_i t_{n_i}$. Como $\langle x \rangle \cap \langle T \rangle = \{e\}$, por una parte tenemos que $-1 - k_1 - \cdots - k_j = 0$, de donde $k_1 + \cdots + k_j = -1$. Por la otra, la independencia de $T \setminus \{e\}$ implica que $i = j$ y, después de re-enumerar el conjunto $\{m_1, \ldots, m_i\}$, $n_r = m_r$, para cada $r = 1, \ldots i$. Así, $k_r = l_r$ para cada $r = 1, \ldots, i$, de donde cada k_r es positivo, lo cual es una contradicción. Concluimos que $\overline{H}$ no es un subgrupo de G_S. □

En la siguiente proposición presentamos condiciones suficientes en un subsemigrupo S de un grupo paratopológico G conmutativo primero numerable para que el grupo G_S no sea un grupo-SP.

Si T es un conjunto independiente de elementos de orden infinito en un grupo conmutativo G con neutro e, cada elemento $t \in \langle T \rangle$ distinto de e puede escribirse de manera única como $t = k_1 t_1 + \cdots + k_n t_n$, con $k_1, \ldots, k_n$ enteros distintos de cero y $t_1, \ldots, t_n \in T$ distintos. En ese caso escribimos $Exp_T(t) = k_1 + \cdots + k_n$.

Proposición 3.3.3. *Sea (G, τ) un grupo paratopológico abeliano primero numerable con elemento neutro e y $S = S \cup \{e\}$ un subsemigrupo de G. Supongamos que*

(1) *existe un conjunto infinito independiente $K \subseteq S$ de elementos de orden infinito tal que e es un punto de acumulación de K,*
(2) *existe $x^* \in G$ de orden infinito tal que $\langle x^* \rangle \cap \langle S \rangle = \{e\}$, y*
(3) *si $T = \langle K \rangle$, y $t \in T \cap S$, entonces $Exp_T(t) \geq 0$.*

Entonces el grupo paratopológico primero numerable $G_S = (G, \tau_S)$ no es un grupo-SP.

Demostración. Sea $\{V_n\}_{n \in \omega}$ una base local para e en (G, τ). Para cada $n \in \omega$ elegimos un elemento $v_n \in V_n \cap K$ de tal manera que $v_n \neq v_m$ si $n \neq m$. Consideremos el subgrupo H de G generado por el conjunto $\{x^* + v_n : n \in \omega\}$. Como la familia $\{V_n\}_{n \in \omega}$ es una base local para e, tenemos que $x^* \in \overline{H}$, aquí la cerradura es tomada en G_S. Afirmamos que $-x^* \notin \overline{H}$. Supongamos que no, es decir, que $-x^* \in \overline{H}$. Como S es una vecindad abierta de e en G_S, tenemos que $(-x^* + S) \cap H \neq \emptyset$. Entonces $-x^* + s = k_1 (x^* + v_{n_1}) + \cdots + k_i (x^* + v_{n_i})$, para algunos $s \in S$, $k_1, \ldots, k_i$ enteros, y $n_1, \ldots, n_i \in \omega$ distintos. De aquí, $(k_1 + \cdots + k_i + 1)\, x^* = s - k_1 v_{n_1} - \cdots - k_i v_{n_i} \in \langle x^* \rangle \cap \langle S \rangle$, lo cual implica por (2) que $k_1 + \cdots + k_i + 1 = 0$. Pero entonces $s = k_1 v_{n_1} + \cdots + k_i v_{n_i} \in S \cap T$, y $Exp_T(s) < 0$, lo que contradice (3). Entonces $-x^* \notin \overline{H}$, y $\overline{H}$ no es un subgrupo de G_S. □

Corolario 3.3.4. *Existe una topología primero numerable que contiene a la topología usual de $\mathbb{R}$ y que hace al grupo aditivo $\mathbb{R}$ un grupo paratopológico que no es grupo-SP.*

Demostración. El grupo aditivo $\mathbb{R}$ con la topología usual es primero numerable. Elegimos una base numerable $\{U_n : n \in \omega\}$ de vecindades del 0 en $\mathbb{R}$ tal que $U_{n+1} \subset U_n$, para cada $n \in \omega$. Podemos definir por inducción un conjunto infinito $K = \{x_n : n \in \omega\} \subset \mathbb{R}$ como sigue: Sea $x_0 \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap U_0$. Una vez definidos los elementos

$x_0, \dots, x_n$, con $x_i \in U_i$ independientes, para cada $i = 1, \dots, n$ consideramos el conjunto $A_n = \mathbb{Q}x_0 + \cdots + \mathbb{Q}x_n$. Como A_n es numerable, podemos elegir un número irracional $x_{n+1} \in (\mathbb{R} \setminus A_n) \cap U_{n+1}$. Verificamos que el conjunto es independiente. Supongamos que no, entonces existe una combinación lineal $k_1 x_{i_1} + \cdots + k_n x_{i_n} = 0$ de elementos de K, con enteros $k_1, \dots, k_n$ distintos de cero y $i_1 < \cdots < i_n$, donde $n > 1$. Entonces $x_{i_n} = -\frac{k_1}{k_n} x_{i_1} - \cdots - \frac{k_{n-1}}{k_n} x_{i_{n-1}} \in \mathbb{Q}x_{i_1} + \cdots + \mathbb{Q}x_{i_{n-1}} \subseteq A_{i_{n-1}}$, una contradicción. Así, K es un conjunto independiente de elementos de elementos de orden infinito. Claramente 0 es un punto de acumulación de K. Sea S el subsemigrupo de $\mathbb{R}$ generado por $K \setminus \{x_0\}$ y $x^* = x_0$. Por la proposición 3.3.3, el grupo paratopológico $\mathbb{R}_S$ es primero numerable y no es un grupo-SP. Por su definición, la topología de $\mathbb{R}_S$ es primero numerable y refina a la topología usual de $\mathbb{R}$. □

El carácter del grupo (G, τ) en las proposiciones 3.3.2 y 3.3.3 es numerable. Con algunos ajustes, estos resultados se pueden extender a grupos (G, τ) de carácter arbitrario $\lambda \geq \omega$. Sólo necesitamos pedir que $|K \cap U| \geq \lambda$ para cada $U \in \mathcal{N}(e)$, donde $\mathcal{N}(e)$ es una base local de la identidad e en (G, τ).

3.4. Ejemplos

En el ejemplo 3 de su artículo [**15**], Ravsky introduce cuatro topologías distintas para el grupo multiplicativo $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ del círculo. Con cada una de estas topologías, verificamos si el grupo paratopológico es (o no) un grupo-SP.

Aunque las pruebas en los primeros tres casos son muy parecidas, presentamos cada una de las topologías definidas por Ravsky en un ejemplo distinto para comodidad del lector.

Antes de presentar los ejemplos, mostraremos la existencia de epimorfismos $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{Q}$ de grupos. El grupo $\mathbb{S}^1$ es isomorfo al grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, supongamos que $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un isomorfismo de grupos. Los grupos aditivos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales. Sea $\mathbf{B}$ una base de $\mathbb{R}$ considerado como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, tal que $1 \in \mathbf{B}$. Cualquier función $f : \mathbf{B} \to \mathbb{Q}$ induce una transformación lineal $T_f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones no constantes $f : \mathbf{B} \to \mathbb{Q}$ tales que $f(1) = 0$. Dada cualquier $f \in \mathcal{F}$, la transformación lineal inducida T_f, que en particular es un homomorfismo de grupos, es suprayectiva y su núcleo contiene a $\mathbb{Z}$. El homomorfismo T_f induce a su vez un homomorfismo $s_f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ suprayectivo, de donde $s_f \circ h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{Q}$ es un epimorfismo de grupos.

El grupo del círculo con la topología usual τ es denotado como $\mathbb{T}$, esto es, $\mathbb{T} = (\mathbb{S}^1, \tau)$. Una base local en el neutro e de $\mathbb{T}$ es la familia $\mathcal{B} = \{B_\epsilon(e) : \epsilon > 0\}$, donde $B_\epsilon(e) = \{z \in \mathbb{T} : |arg(z)| < \epsilon\}$. Para cada elemento x de orden infinito en $\mathbb{T}$, el grupo cíclico $\langle x \rangle$ es denso en $\mathbb{T}$.

Sea $s : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{Q}$ un epimorfismo de grupos.

Por ser $\mathbb{Q}$ libre de torsión y s un homomorfismo, se tiene que $s\,(x) = 0$ para cada elemento x de orden finito en $\mathbb{S}^1$.

Para cada $a \in \mathbb{R}$, se definen

$T_a = \{x \in \mathbb{S}^1 : s(x) > a\}$ y $T_a^0 = \{x \in \mathbb{S}^1 : s(x) \geq a\}$.

Si τ y σ son dos topologías en un mismo conjunto X, denotamos como $\tau \vee \sigma$ a la menor topología en X que contiene a $\tau \cup \sigma$. Una base para $\tau \vee \sigma$ es la familia $\mathcal{B} = \{U \cap V : U \in \tau, V \in \sigma\}$.

Ejemplo 3.4.1. *La familia $\mathcal{B}_1' = \{T_a : a < 0\}$ es una base local en e para una topología σ_1 de grupo paratopológico en $\mathbb{S}^1$. La familia $\mathcal{B}_1 = \{S \cap B_\epsilon(e) : S \in \mathcal{B}_1', \epsilon > 0\}$ es una base local en e para el grupo paratopológico $G_1 = (\mathbb{S}^1, \tau \vee \sigma_1)$ de Hausdorff. Probamos que el grupo G_1 no es un grupo-SP.*

Demostración. Probamos primero que existen elementos $x \in \mathbb{S}^1$ de orden infinito tales que $s(x) = 0$. Por ser s un epimorfismo y la cardinalidad de $\mathbb{S}^1$ más que numerable, existe $q_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $s^{-1}(q_0)$ no es numerable. Si $q_0 = 0$, necesariamente uno de los elementos de $s^{-1}(0)$ es de orden infinito, pues la familia de elementos de orden finito en $\mathbb{S}^1$ es numerable. Si q_0 es distinto de 0, podemos considerar sin pérdida de generalidad que q_0 es positivo. Por ser s un homomorfismo y $\mathbb{Q}$ libre de torsión, todos los elementos de $s^{-1}(q_0)$ son de orden infinito. Elegimos un elemento $z \in s^{-1}(q_0)$ y definimos $R = \{y \in \mathbb{S}^1 : (\exists n \in \mathbb{N})\,(y^n = z^n)\}$. El conjunto R es numerable, por ello podemos elegir un elemento $y \in s^{-1}(q_0) \setminus R$. Por ser s un homomorfismo se tiene que $s(x) = 0$, donde $x = zy^{-1}$. Afirmamos que el orden de x es infinito. De lo contrario, se tendría que $o(x) = n$ para algún número natural n, por lo que $x^n = z^n y^{-n} = e$, y $z^n = y^n$, lo cual es una contradicción, pues por su definición $y \notin R$. Entonces el orden de x es infinito y $s(x) = 0$. Sean x, $y \in G_1$ de orden infinito tales que $s(x) = 0$ y $s(y) > 0$. Probaremos que $\overline{\langle x\rangle}$ no es un subgrupo de G_1. Primero verificamos que $y^{-1} \in \overline{\langle x\rangle}$.

Por ser x de orden infinito, el conjunto $y\langle x\rangle$ es denso en $\mathbb{T}$. Consideremos ahora una vecindad básica $U = T_a \cap B_\epsilon(e) \in \mathcal{B}_1$ de e en G_1. Como $y\langle x\rangle$ es denso en $\mathbb{T}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $yx^n \in B_\epsilon(e)$, y como $s(yx^n) = s(y) > 0 > a$, se tiene que $yx^n \in T_a$. Entonces $yx^n \in U$, y $x^n = y^{-1}yx^n \in y^{-1}U$, por lo cual $y^{-1}U \cap \langle x\rangle \neq \emptyset$ Como U era una vecindad básica arbitraria de e en G_1, se tiene que $y^{-1} \in \overline{\langle x\rangle}$.

Ahora probamos que $y \notin \overline{\langle x\rangle}$. Elegimos $a < 0$ tal que $s(y^{-1}) < a$ y cualquier $\epsilon > 0$. Si $z \in U = T_a \cap B_\epsilon(e)$, se tiene que $s(yz) = s(y) + s(z) > -a + a = 0$. Entonces $yU \cap \langle x\rangle = \emptyset$. Por ello $y \notin \overline{\langle x\rangle}$. Concluimos que $\overline{\langle x\rangle}$ no es un subgrupo de G_1. □

Ejemplo 3.4.2. *La familia $\mathcal{B}_2' = \{T_0^0\}$ es una base local en e para una topología de grupo paratopológico σ_2 en $\mathbb{S}^1$. La familia $\mathcal{B}_2 = \{T_0^0 \cap B_\epsilon(e) : \epsilon > 0\}$ es una base local en e para el grupo paratopológico $G_2 = (\mathbb{S}^1, \tau \vee \sigma_2)$ de Hausdorff. Probaremos que el grupo G_2 no es un grupo-SP.*

Demostración. Elegimos elementos x, y de orden infinito en G_2 tales que $s(x) = 0$ y $s(y) > 0$. Probamos que $y^{-1} \in \overline{\langle x\rangle}$.

El conjunto $y\langle x\rangle$ es denso en $\mathbb{T}$. Sea $\epsilon > 0$, y $U = T_0^0 \cap B_\epsilon(e)$ una vecindad básica de e en G_2. Como $y\langle x\rangle$ es denso en $\mathbb{T}$, para alguna $n \in \mathbb{Z}$, $yx^n \in B_\epsilon(e)$, y como $s(yx^n) = s(y) > 0$, tenemos que $yx^n \in T_0^0$. Así $yx^n \in U$. Por ello $x^n = y^{-1}yx^n \in y^{-1}U$. Como U era una vecindad básica arbitraria de e en G_2, concluimos que $y^{-1} \in \overline{\langle x\rangle}$.

Probaremos ahora que $y \notin \overline{\langle x\rangle}$. Consideremos cualquier $\epsilon > 0$. Si $z \in U = T_0^0 \cap B_\epsilon(e)$, entonces $s(yz) = s(y) + s(z) \geq s(y) > 0$. Así $yU \cap \langle x\rangle = \emptyset$. Por ello $y \notin \overline{\langle x\rangle}$. Concluimos que $\overline{\langle x\rangle}$ no es un subgrupo de G_2. □

Ejemplo 3.4.3. *La familia $\mathcal{B}_3' = \{\{e\} \cup T_0\}$ es una base local en el neutro e para una topología σ_3 de grupo paratopológico en $\mathbb{S}^1$. La familia $\mathcal{B}_3 = \{(\{e\} \cup T_0) \cap B_\epsilon(e) : \epsilon > 0\}$ es una base local en e para el grupo paratopológico $G_3 = (\mathbb{S}^1, \tau \vee \sigma_3)$ de Hausdorff. Probaremos que el grupo G_3 no es un grupo-SP.*

Demostración. Elegimos elementos x, y de orden infinito en G_3 tales que $s(x) = 0$ y $s(y) > 0$. Probamos que $y^{-1} \in \overline{\langle x\rangle}$.

El conjunto $y\langle x\rangle$ es denso en $\mathbb{T}$. Sean $\epsilon > 0$ y $U = (\{e\} \cup T_0) \cap B_\epsilon(e)$ una vecindad abierta básica de e en G_3. Como $y\langle x\rangle$ es denso en $\mathbb{T}$, para alguna $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $yx^n \in B_\epsilon(e)$, y como $s(yx^n) = s(y) > 0$, se sigue que $yx^n \in T_0$. Entonces $yx^n \in U$. Por ello $x^n = y^{-1}yx^n \in y^{-1}U$. Como U era una vecindad abierta básica de e en G_3, tenemos que $y^{-1} \in \overline{\langle x\rangle}$. Por otra parte, consideremos cualquier $\epsilon > 0$. Si $z \in U = (\{e\} \cup T_0) \cap B_\epsilon(e)$, entonces $s(yz) = s(y) + s(z) \geq s(y) > 0$. Así $yU \cap \langle x\rangle = \emptyset$. Por ello $y \notin \overline{\langle x\rangle}$. Concluimos que $\overline{\langle x\rangle}$ no es un subgrupo de G_3. □

Ejemplo 3.4.4. *La familia $\mathcal{B}_4' = \{\{e\} \cup T_a : a > 0\}$ es una base local en el neutro e para una topología σ_4 de grupo paratopológico en $\mathbb{S}^1$. La familia $\mathcal{B}_4 = \{S \cap B_\epsilon(e) : S \in \mathcal{B}_4',\ \epsilon > 0\}$ es una base local en e para el grupo paratopológico $G_4 = (\mathbb{S}^1, \tau \vee \sigma_4)$ de Hausdorff. Probamos que el grupo G_4 es un grupo-SP.*

Demostración. Primero demostraremos que si $x \in G_4$ es un elemento tal que $s(x) \neq 0$, entonces $\overline{\langle x\rangle} = G_4$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $s(x) > 0$. Sean $y \in G_4$, $a > 0$, $\epsilon > 0$, y definimos $U = (\{e\} \cup T_a) \cap B_\epsilon(e)$. Elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que $|s(y)| + a < ns(x)$ y $y^{-1}x^n \in y^{-1}\langle x\rangle \cap B_\epsilon(e)$. Como $s(y^{-1}x^n) = s(y^{-1}) + ns(x) = -s(y) + ns(x) \geq -|s(y)| + ns(x) > a$, se tiene que $y^{-1}x^n \in U$. Así $x^n \in yU$. Por ello $y \in \overline{\langle x\rangle}$. Como y es un elemento arbitrario de G_4, concluimos que $\overline{\langle x\rangle} = G_4$.

Ahora probamos que G_4 es un grupo-SP. Sea H un subgrupo de G_4. Si H tiene un elemento x tal que $s(x) \neq 0$, entonces $G_4 = \overline{\langle x\rangle} \subseteq \overline{H}$, y por lo tanto, $\overline{H} = G_4$ es un subgrupo de G_4. Finalmente, si $s(x) = 0$ para cada $x \in H$, demostraremos que H es cerrado en G_4. Sea $y \in (G_4 \setminus H)$. Consideremos $a > |s(y)|$ y cualquier $\epsilon > 0$. Sea $U = (\{e\} \cup T_a) \cap B_\epsilon(e)$ y tomemos cualquier $yu \in yU$. Si $u = e$ entonces $yu = y \notin H$. Si $u \neq e$, entonces $s(yu) = s(y) + s(u) > s(y) + a \geq -|s(y)| + a > 0$, así $yu \notin H$. Por lo tanto, $yU \cap H = \emptyset$, y tenemos entonces que $y \notin \overline{H}$. Por ello $\overline{H} = H$ es un subgrupo de G_4. Como para cada subgrupo H de G_4, la cerradura $\overline{H}$ de H es un subgrupo de G_4, concluimos que G_4 es un grupo-SP. □

CAPÍTULO 4

Grupos casi topológicos

4.1. Definiciones, notación y terminología

El ejemplo clásico de un grupo paratopológico que no es grupo topológico es la recta de Sorgenfrey S. El grupo subyacente de S es $\mathbb{R}$, el grupo aditivo de los números reales, y una base para la topología de S es la familia de los intervalos semiabiertos $[a, b)$ de $\mathbb{R}$. En [**18**] se prueba que S^κ es un grupo-*SP*. La propiedad importante de S en la demostración de estos hechos es la siguiente: La topología usual de grupo topológico de $\mathbb{R}$ es más débil que la topología de S, y para cada abierto básico $U = [a, b)$ de S, el conjunto $U \setminus \{a\}$ es abierto en el grupo topológico $\mathbb{R}$. Con esta propiedad en mente, definimos la clase de los grupos *casi topológicos*.

Definición 4.1.1. *Sea (G, τ) un grupo paratopológico que satisface el axioma de separación T_1. Decimos que G es un grupo casi topológico si existe una base local $\mathcal{B}$ en el neutro e de G y una topología γ de grupo topológico en G tales que:*

a) $\gamma \subseteq \tau$, y
b) para cada $U \in \mathcal{B}$, el conjunto $\widetilde{U} = U \setminus \{e\}$ es abierto en (G, γ).

Si G, γ , τ, y $\mathcal{B}$ cumplen con lo establecido en la definición 4.1.1, escribiremos $\hat{G} = (G, \gamma)$ y diremos que $\hat{G}$ es el grupo topológico *subyacente* en G. Diremos también que $\mathcal{B}$ es una base local para e en G compatible con $\hat{G}$ y que G es un *grupo casi topológico* con estructura $(\tau, \gamma, \mathcal{B})$.

Lema 4.1.2. *Sea G un grupo casi topológico y $\mathcal{B}$ una base local del neutro e de G compatible con $\hat{G}$. Entonces*

a) Si $U \in \mathcal{B}$ entonces $\widetilde{U}^{-1}$ es un abierto de G, donde $\widetilde{U} = U \setminus \{e\}$.
b) Para cada subconjunto $M \subseteq G$, la cerradura $\overline{M}$ de M en G está contenida en la cerradura $\overline{M}^{\hat{G}}$ de M en $\hat{G}$.

Demostración. (a) Sea $U \in \mathcal{B}$. Por la definición de grupo casi topológico, $\widetilde{U}$ es abierto en $\hat{G}$. Como $\hat{G}$ es un grupo topológico, $\widetilde{U}^{-1}$ es abierto en $\hat{G}$, por ser la topología de $\hat{G}$ es más débil que la de G, concluimos que $\widetilde{U}^{-1}$ es abierto en G.

(b) Sean $M \subseteq G$, $x \in \overline{M}$ y V una vecindad abierta de x en $\hat{G}$. Por estar la topología de $\hat{G}$ contenida en la topología de G, el conjunto V es una vecindad abierta de x en G. Dado que $x \in \overline{M}$ se tiene que $V \cap M \neq \emptyset$. Como V era una vecindad arbitraria de x en $\hat{G}$, concluimos que $x \in \overline{M}^{\hat{G}}$. □

La clase de los grupos casi topológicos es cerrada bajo subgrupos.

PROPOSICIÓN 4.1.3. *Sea G un grupo casi topológico y H un subgrupo de G. Entonces H es un grupo casi topológico.*

DEMOSTRACIÓN. El subgrupo H de G es T_1 por ser G un grupo T_1. Sean $\hat{G} = (G, \gamma)$ el grupo topológico subyacente en $G = (G, \tau)$ y $\mathcal{B}$ una base local en el neutro e de G compatible con $\hat{G}$. La familia $\mathcal{B}_H = \{U \cap H : U \in \mathcal{B}\}$ es una base local para e en el grupo paratopológico H considerado como subgrupo de G. La familia $\gamma_H = \{V \cap H : V \in \gamma\}$ es la topología de grupo topológico de H considerado como subgrupo de $\hat{G}$. La topología γ_H está contenida en la topología $\tau_H = \{U \cap H : U \in \tau\}$ del grupo paratopológico H por estar γ contenida en τ. Dado $W \in \mathcal{B}_H$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $W = U \cap H$. Tenemos que el conjunto $\widetilde{W} = W \setminus e = (U \cap H) \setminus e = \widetilde{W} \cap H \in \gamma_H$ es abierto en $\hat{H} = (H, \gamma_H)$. Concluimos que H es un grupo casi topológico. □

PROPOSICIÓN 4.1.4. *Sea G un grupo casi topológico con grupo topológico subyacente $\hat{G}$, y $\mathcal{B}$ una base local en el neutro e de G compatible con $\hat{G}$. Entonces el conjunto $\mathcal{B}' = \{UU^{-1} : U \in \mathcal{B}\}$ es una base local en e para la topología de $\hat{G}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si G es discreto entonces $G = \hat{G}$ es un grupo topológico discreto y no hay nada que probar.

Si G no es discreto, para cada $U \in \mathcal{B}$ el conjunto $UU^{-1} = \widetilde{U}\widetilde{U}^{-1} \cup \widetilde{U} \cup \widetilde{U}^{-1}$ es abierto en $\hat{G}$. Primero probamos que $\mathcal{B}'$ es una base local en e para una topología de grupo topológico en G:

(a) Sean UU^{-1} y VV^{-1} elementos de $\mathcal{B}'$, con U y V en $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ es base local en e para el grupo casi topológico G, existe un elemento $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq U \cap V$. Se sigue que $WW^{-1} \subseteq UU^{-1} \cap VV^{-1}$. De la definición de $\mathcal{B}'$ se tiene que $WW^{-1} \in \mathcal{B}'$.

(b) Sean $UU^{-1} \in \mathcal{B}'$, con $U \in \mathcal{B}$, y $x \in UU^{-1}$. Como UU^{-1} es abierto en $\hat{G}$ existe una vecindad simétrica abierta W de e en $\hat{G}$ tal que $xW^2 \subseteq UU^{-1}$. Sea $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq W$. Así $xVV^{-1} \subseteq xWW^{-1} = xW^2 \subseteq UU^{-1}$, donde $VV^{-1} \in \mathcal{B}'$, por la definición de $\mathcal{B}'$.

(c) Sean $UU^{-1} \in \mathcal{B}'$, con $U \in \mathcal{B}$, y $x \in \hat{G}$. Como UU^{-1} es abierto en $\hat{G}$ existe una vecindad abierta simétrica W de e en $\hat{G}$ tal que $xW^2x^{-1} \subseteq UU^{-1}$. Sea $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq W$. Se tiene que $VV^{-1} \in \mathcal{B}'$, y $xVV^{-1}x^{-1} \subseteq xWW^{-1}x^{-1} = xW^2x^{-1} \subseteq UU^{-1}$.

(d) Sea $UU^{-1} \in \mathcal{B}'$. Como UU^{-1} es abierto en el grupo topológico $\hat{G}$, podemos elegir una vecindad abierta simétrica W de e en $\hat{G}$ tal que $W^4 \subseteq UU^{-1}$. Como la topología de $\hat{G}$ está contenida en la topología de G y $\mathcal{B}$ es una base local de e en G, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq W$. Entonces $VV^{-1} \in \mathcal{B}'$ y $VV^{-1}\left(VV^{-1}\right)^{-1} = VV^{-1}VV^{-1} \subset WW^{-1}WW^{-1} = W^4 \subseteq UU^{-1}$.

Concluimos que $\mathcal{B}'$ satisface las condiciones de Pontryagin para una base local en e de una topología ρ de grupo topológico en G. Como cada elemento de $\mathcal{B}'$ es abierto en $\hat{G}$, la topología ρ está contenida en la topología γ de $\hat{G}$. Ahora probamos que la topología de $\hat{G}$ está contenida en ρ. Dada una vecindad abierta V de e en $\hat{G}$, sean W una vecindad abierta simétrica de e en $\hat{G}$ tal que $W^2 \subseteq V$ y $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subseteq W$. Se sigue que $UU^{-1} \subseteq W^2 \subseteq V$. Por ser $\hat{G}$ un espacio homogéneo, concluimos que V es abierto en

(G, ρ). De aquí que la topología de $\hat{G}$ está contenida en ρ. Como se tienen ambas contenciones, $\gamma = \rho$. Esto es, la familia $\mathcal{B}'$ es una base local para e en $\hat{G}$. $\square$

PROPOSICIÓN 4.1.5. *Sea G un grupo casi topológico no discreto con estructura $(\tau, \gamma, \mathcal{B})$. Entonces γ es la topología de grupo topológico más fuerte contenida en la topología τ de G.*

DEMOSTRACIÓN. Sean σ una topología de grupo topológico en el conjunto G con $\sigma \subseteq \tau$ y V una vecindad abierta del neutro e en (G, σ). Por ser (G, σ) un grupo topológico, existe una vecindad abierta simétrica W de e en (G, σ) tal que $W^2 \subseteq V$. Como $\sigma \subseteq \tau$ y $\mathcal{B}$ es una base local para e en (G, τ), existe $U \in \mathcal{B}$ con $U \subseteq W$. Entonces $UU^{-1} \subseteq W^2 \subseteq V$. Por la proposición 4.1.4, $\mathcal{B}' = \{UU^{-1} : U \in \mathcal{B}\}$ es una base local para e en $\hat{G} = (G, \gamma)$, por lo que V es abierto en $\hat{G}$. Como todas las vecindades abiertas de e en (G, σ) forman una base local para e en (G, σ), concluimos que $\sigma \subset \gamma$. Esto es, la topología de $\hat{G} = (G, \gamma)$ es la topología más fuerte de grupo topológico contenida en la topología de G. $\square$

Para cada grupo paratopológico (G, τ) existe la topología más fuerte γ de grupo topológico en G contenida en τ. El grupo topológico (G, γ) es llamado en [**3**] *reflexión* de (G, τ). En vista de la proposición 4.1.5, una definición alternativa de grupo casi topológico sería:

Un grupo paratopológico G es un grupo *casi topológico* si existe una base local $\mathcal{B}$ en el neutro e de G tal que para cada $U \in \mathcal{B}$, el conjunto $\widetilde{U} = U \setminus \{e\}$ es abierto en la reflexión $\hat{G}$ de G.

Haciendo uso de la proposición 4.1.5, podemos probar que la clase de los grupos casi topológicos no es productiva. Sea S la recta de Sorgenfrey.

EJEMPLO 4.1.6. *El grupo paratopológico S^2 no es un grupo casi topológico.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que, contrariamente a la conclusión del ejemplo, S^2 es un grupo casi topológico. Vamos a definir un grupo casi topológico G que nos será útil para probar que el grupo topológico subyacente $\hat{S^2}$ de S^2 es $(\mathbb{R}^2, \gamma)$, el grupo aditivo $\mathbb{R}^2$ con su topología usual. El grupo G será útil también para llegar a una contradicción.

La familia $\mathcal{B}' = \{\{e\} \cup ((0, a) \times (0, a)) : a > 0\}$ de subconjuntos del grupo aditivo $\mathbb{R}^2$ satisface las condiciones de Pontryagin para una base local en el neutro $e = (0, 0)$ de una topología σ de grupo paratopológico en $\mathbb{R}^2$. Sea $G = (\mathbb{R}^2, \sigma)$. Es claro que $\gamma \subseteq \sigma$, además para cada $U = \{e\} \cup ((0, a) \times (0, a)) \in \mathcal{B}'$, el conjunto $\widetilde{U} = U \setminus \{e\}$ es abierto en $(\mathbb{R}^2, \gamma)$. Por lo tanto G es un grupo casi topológico con grupo topológico subyacente $\hat{G} = (\mathbb{R}^2, \gamma)$.

Una base local en e para la topología τ de S^2 es el conjunto
$\mathcal{B} = \{[0, a) \times [0, a) : a > 0\}$. Es fácil ver que cada elemento de $\mathcal{B}$ es abierto en G, por lo que la topología τ está contenida en σ, y como dado cualquier $U \in \mathcal{B}'$, ningún elemento de $\mathcal{B}$ está contenido en U, tenemos que $\tau \neq \sigma$. Es fácil verificar que $\gamma \subseteq \tau$. Tenemos entonces que $\gamma \subseteq \tau \subseteq \sigma$.

Por la proposición 4.1.5, γ es la topología más fuerte de grupo topológico en $\mathbb{R}^2$ contenida en σ, en consecuencia γ también es la topología más fuerte de grupo topológico en $\mathbb{R}^2$

contenida en τ. Por ello $\hat{S^2} = (\mathbb{R}^2, \gamma)$. Sea $\mathcal{C}$ una base local en e para S^2 compatible con $\hat{S^2}$. Para cada $a > 0$, el conjunto $U = [0, a) \times [0, a) \in \mathcal{B}$ es abierto en S^2. Como $\mathcal{C}$ es una base local en e para S^2, podemos elegir $V \in \mathcal{C}$ con $V \subseteq U$. Como $\mathcal{C}$ es compatible con $\hat{S^2}$, $\widetilde{V} = V \setminus \{e\}$ es abierto en $\hat{S^2} = (\mathbb{R}^2, \gamma)$. Esto implica que $V \cap ((\{0\} \times [0, a)) \cup ([0, a) \times \{0\})) = \{e\}$, ó $V \subseteq \{e\} \cup ((0, a) \times (0, a))$. Entonces cada vecindad abierta básica de e en G es abierta en (S^2, τ), esto implica que $\sigma \subseteq \tau$, una contradicción. Concluimos que S^2 no es un grupo casi topológico.

□

4.2. Cocientes

Lema 4.2.1. *Supongamos que H es un subgrupo no discreto de un grupo casi topológico G. Entonces la cerradura $\overline{H}$ de H en G coincide con la cerradura $\overline{H}^{\hat{G}}$ de H en el grupo topológico $\hat{G}$ subyacente en G.*

Demostración. Como la topología de $\hat{G}$ es más débil que la topología de G, se sigue que $\overline{H} \subseteq \overline{H}^{\hat{G}}$. Ahora probaremos que $\overline{H}^{\hat{G}} \subseteq \overline{H}$. Sean $x \in \overline{H}^{\hat{G}}$ y $U \in \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es una base local del neutro e de G compatible con $\hat{G}$. A continuación verificaremos que $xU \cap H \neq \emptyset$. Como H no es discreto y $e \in H$, podemos elegir un elemento $u \in \widetilde{U} \cap H$. El conjunto $u\widetilde{U}^{-1}x^{-1}$ es una vecindad de x^{-1} en $\hat{G}$, y como $\overline{H}^{\hat{G}}$ es subgrupo de $\hat{G}$, el elemento x^{-1} pertenece a $\overline{H}^{\hat{G}}$. Entonces $u\widetilde{U}^{-1}x^{-1} \cap H \neq \emptyset$, que a su vez implica que $\widetilde{U}^{-1}x^{-1} \cap H \neq \emptyset$, y entonces $\emptyset \neq x\widetilde{U} \cap H \subseteq xU \cap H$. Concluimos que $x \in \overline{H}$. □

Lema 4.2.2. *Si N es un subgrupo discreto de un grupo casi topológico G entonces existe una base local $\mathcal{B}'$ del neutro e de G compatible con el grupo topológico $\hat{G}$ subyacente en G, tal que para todo $U \in \mathcal{B}'$, $U \cap N = \{e\}$.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ una base local para e en G compatible con $\hat{G}$ y $\mathcal{B}' = \{U \in \mathcal{B} : U \cap N = \{e\}\}$. Como N es discreto la familia $\mathcal{B}'$ es no vacía. Es suficiente probar que cada elemento U de $\mathcal{B}$ existe $V \in \mathcal{B}'$ con $V \subseteq U$. Sea $U \in \mathcal{B}$, como N es discreto y $e \in N$, existe un conjunto abierto $W \in G$ tal que $W \cap N = \{e\}$. El conjunto $W \cap U$ es una vecindad de e en G. Por ser $\mathcal{B}$ una base local para e en G, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset U \cap W \subseteq U$. Claramente $V \in \mathcal{B}'$. □

Proposición 4.2.3. *Sea G un grupo casi topológico y N un subgrupo invariante cerrado de G. Entonces el grupo cociente G/N es un grupo casi topológico.*

Demostración. Sea γ la topología del grupo topológico $\hat{G}$ subyacente en G y $\pi : G \to G/N$ la función cociente.

El Grupo G/N es T_1 por ser N un subgrupo cerrado de G. Si N es un subgrupo discreto, por el lema 4.2.2 podemos considerar una base local $\mathcal{B}$ de e en G compatible con $\hat{G}$ tal que para todo $U \in \mathcal{B}$, $U \cap N = \{e\}$. Como $\mathcal{B}$ es una base local de e en G, la familia $\mathcal{B}' = \{\pi(U) : U \in \mathcal{B}\}$ es una base para la topología del grupo cociente G/N. La familia $\pi(\gamma) = \{\pi(V) : V \in \gamma\}$ es una topología de grupo topológico en el conjunto G/N

contenida en la topología del grupo cociente G/N. Para todo $\pi(U) \in \mathcal{B}'$, con $U \in \mathcal{B}$, se tiene que $\pi(U) \setminus \{e_{G/N}\} = \pi(\widetilde{U})$ pertenece a $\pi(\gamma)$.

Si N no es discreto, se sigue del lema 4.2.1 que N es cerrado en $\hat{G}$. Entonces, dada una base local para e en G compatible con $\hat{G}$ y cualquier abierto básico $U \in \mathcal{B}$, el conjunto $\pi(U) \setminus \{e_{G/N}\}$ es abierto en el grupo topológico $(G/N, \pi(\gamma))$, pues $\pi^{-1}\left(\pi(U) \setminus \{e_{G/N}\}\right) = UN \setminus N = \widetilde{U}N \setminus N$ es abierto en $\hat{G}$. □

Los cocientes de grupos casi topológicos no preservan los axiomas de separación, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2.4. *Existe un grupo casi topológico G de Hausdorff y un subgrupo cerrado invariante N de G tal que G/N no es de Hausdorff.*

Demostración. Consideremos el grupo aditivo $G = (\mathbb{R}^2, \tau)$ donde τ es la topología cuya base local en $e = (0,0)$ es la familia

$$\mathcal{B} = \{\{e\} \cup ((0,a) \times (0,a)) : a > 0\}.$$

Entonces G es un grupo casi topológico de Hausdorff cuyo grupo subyacente $\hat{G}$ es el grupo aditivo $\mathbb{R}^2$ con su topología usual. El subgrupo $N = \{(q,-q) : q \in \mathbb{Q}\}$ es cerrado y discreto en G. Afirmación: El grupo cociente G/N no es de Hausdorff.

Prueba de la afirmación: Sean $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $z = (-t, t)$. Consideremos el elemento $\pi(x)$ de G/N, donde $\pi : G \to G/N$ es la función cociente. Dado cualquier $a > 0$, consideremos el elemento $U = \{e\} \cup ((0,a) \times (0,a))$ de $\mathcal{B}$. Se tiene que

$\pi(U) \cap (\pi(z)\pi(U)) = \pi(\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, -x < y < -x + a\}) \neq \emptyset$. De aquí se sigue que para cualesquiera $V, W \in \mathcal{B}$ se cumple $\pi(V) \cap (\pi(z)\pi(W)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, G/N no es de Hausdorff. □

4.3. Los subgrupos de productos son saturados

En cualquier grupo topológico G, las vecindades abiertas simétricas del neutro e de G forman una base local. Por esto, todos los grupos topológicos son saturados. En esta sección demostramos que cualquier subgrupo de un producto de grupos casi topológicos es saturado [prop. 4.3.3]. Primero probamos que los grupos casi topológicos son saturados.

Proposición 4.3.1. *Cualquier grupo casi topológico es saturado.*

Demostración. Sea G un grupo casi topológico con estructura $(\tau, \gamma, \mathcal{B})$. Si G es discreto, entonces G es un grupo topológico, y por lo tanto es saturado. Supongamos que G no es discreto. Sea $U \in \mathcal{B}$ una vecindad básica del neutro e de G compatible con $\hat{G}$. Claramente U tiene más de un elemento, de donde $\widetilde{U}$ y $\widetilde{U}^{-1}$ no son vacíos. Por el lema 4.1.2 (a), $\widetilde{U}^{-1}$ es un conjunto abierto en G. Como $\widetilde{U}^{-1} \subseteq U^{-1}$, concluimos que $int(U^{-1})$ no es vacío. □

Proposición 4.3.2. *Cualquier subgrupo de un producto finito de grupos casi topológicos es saturado.*

Demostración. Sea H un subgrupo no discreto de un producto finito $G = \prod_{i=1}^{n} A_i$ de grupos casi topológicos con estructuras $(\tau_i, \gamma_i, \mathcal{B}_i)$, para $i = 1, \ldots, n$, y $V = H \cap \prod_{i=1}^{n} U_i$ una vecindad abierta básica del neutro $e = (e_1, \ldots, e_n)$ en H, con $U_i \in \mathcal{B}_i$. Probaremos que $int_H(V^{-1})$ no es vacío.

Para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ definimos N_x como el número de coordenadas de x distintas del neutro, esto es, $N_x = |\{i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \neq e_i\}|$, y sea $k = máx\,\{N_x : x \in V\}$. Si $k = n$, elegimos cualquier $x \in V$ con $N_x = n$. Se sigue que $x^{-1} \in H \cap \prod_{i=1}^{n} \widetilde{U_i}^{-1} \subseteq V^{-1}$, por ello $x^{-1} \in int_H V^{-1}$. Supongamos que $k < n$. Se elige un elemento $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ tal que $N_x = k$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_i \neq e_i$ si y sólo si $i \leq k$. Para toda $i = 1, \ldots, k$ existe una vecindad abierta simétrica W_i de e_i en (G, γ_i) tal que $x_i W_i \subseteq \widetilde{U}_i$ y $W_i x_i \subseteq \widetilde{U}_i$. El conjunto $O = H \cap ((\prod_{i=1}^{k} x_i^{-1} W_i) \times (\prod_{j=k+1}^{n} U_j))$ es una vecindad abierta de x^{-1} en H.

Afirmación: $O \subseteq V^{-1}$.

Consideremos cualquier elemento $y = (x_1^{-1} w_1, \ldots, x_k^{-1} w_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) \in O$, donde $w_i \in W_i$ para cada $i \leq k$. Como H es un grupo y $x_i W_i \subseteq \widetilde{U}_i$ para $i \leq k$, el elemento $x^2 y = (x_1 w_1, \ldots, x_k w_k, y_{k+1}, \ldots, y_n)$ pertenece a V y $N_{x^2 y} = k$. Así $y_j = e_j$ para $j = k+1, \ldots, n$. Este hecho junto con la simetría de los conjuntos W_i implica que $O^{-1} \subseteq V$ o equivalentemente, $O \subseteq V^{-1}$. Esto prueba la afirmación.

Como O es abierto y no es vacío, concluimos que el interior de V^{-1} en H no es vacío. □

Proposición 4.3.3. *Cualquier subgrupo de un producto arbitrario de grupos casi topológicos es saturado.*

Demostración. Sea H un subgrupo no discreto de un producto $G = \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ de grupos casi topológicos y V una vecindad abierta de e en H. Existe una vecindad abierta básica $U = \prod_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ de e en G tal que $U \cap H \subseteq V$. Como U es un conjunto abierto en G, existe un subconjunto finito F de Λ tal que $U_\alpha \neq A_\alpha$ si y sólo si $\alpha \in F$. Si $F = \emptyset$, entonces claramente $V = H$ y $V^{-1} = H$; así que suponemos que $F \neq \emptyset$. La proyección $p : G \to \prod_{\alpha \in F} A_\alpha$ es un epimorfismo continuo y abierto. Así $p(H)$ es un subgrupo de $\prod_{\alpha \in F} A_\alpha$. Por la proposición 4.3.2, $p(H)$ es saturado. Como $p(U) \cap p(H)$ es una vecindad abierta del neutro de $p(H)$,

$$int_{p(H)}(p(U) \cap p(H))^{-1} = int_{p(H)}(p(U^{-1}) \cap p(H)) \neq \emptyset.$$

Elegimos un conjunto abierto W en $\prod_{\alpha \in F} A_\alpha$ tal que $\emptyset \neq W \cap p(H) \subseteq p(U^{-1}) \cap p(H)$. Como $p^{-1} p(U^{-1}) = U^{-1}$, tenemos que

$$\emptyset \neq p^{-1}(W \cap p(H)) \cap H \subseteq U^{-1} \cap H \subseteq V^{-1}.$$

De aquí se sigue que $int_H(V^{-1}) \neq \emptyset$. Concluimos que H es saturado. □

Corolario 4.3.4. *Cualquier subgrupo de una potencia arbitraria de la recta de Sorgenfrey es saturado.* □

4.4. Los productos de grupos casi topológicos son grupos-SP

Dada una familia finita $\{A_i\}_{i=1}^n$ de grupos casi topológicos con estructuras $(\tau_i, \gamma_i, \mathcal{B}_i)$, denotaremos como $\mathcal{R}$ a la familia de todas las topologías σ en $A = \prod_{i=1}^n A_i$ de la forma $\sigma = \prod_{i=1}^n \sigma_i$, con $\sigma_i \in \{\tau_i, \gamma_i\}$, para cada $i \leq n$.

LEMA 4.4.1. *Sea H un subgrupo de un producto finito $A = \prod_{i=1}^n A_i$ de grupos casi topológicos. Para cada $i \leq n$, sea $(\tau_i, \gamma_i, \mathcal{B}_i)$ una estructura para A_i. Supongamos que para cada topología $\sigma \in \mathcal{R}$ estrictamente más débil que la topología de A, la cerradura $\overline{H}^\sigma$ de H en (A, σ) es un subgrupo de A. Entonces la cerradura $\overline{H}$ de H en A es un subgrupo de A.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente el neutro $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de A pertenece a $\overline{H}$. Por la continuidad de la multiplicación, $\overline{H} \cdot \overline{H} = \overline{H}$. Para probar que $\overline{H}$ es un subgrupo de A, falta probar que $\overline{H} \subseteq \overline{H}^{-1}$. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{H}$ y $U = \prod_{i=1}^n U_i$ una vecindad abierta de e en A tal que $U_i \in \mathcal{B}_i$ para cada $i \leq n$. Definimos $V = \prod_{i=1}^n V_i$ como sigue: $V_i = U_i$ si A_i no es grupo topológico; en el otro caso V_i es una vecindad abierta simétrica de e_i tal que $V_i \subseteq U_i$ y $x_i V_i x_i^{-1} \subseteq U_i$. Claramente V es una vecindad abierta de e contenida en U. Como $x \in \overline{H}$ y xV es una vecindad de x en A, la intersección $xV \cap H$ es no vacía, por tanto existen $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ y $h = (h_1, \ldots, h_n) \in H$ tales que $xv = h$. Si $v = e$, tenemos que $x \in H$, y como H es un subgrupo, $x^{-1} \in H \subseteq \overline{H}$, o $x \in \overline{H}^{-1}$.
Si $v \neq e$, sea $J = \{i \leq n : v_i \neq e_i\}$. Consideramos la topología $\sigma = \prod_{i=1}^n \sigma_i$ en A, definida como $\sigma_i = \gamma_i$ si $i \in J$ y $\sigma_i = \tau_i$ en el otro caso. Por la definición, $\sigma \in \mathcal{R}$. Supongamos primero que la topología σ es estrictamente más débil que la topología de A. Definimos $O = \prod_{i=1}^n O_i$, con $O_i = V_i \setminus \{e_i\}$ si $i \in J$ y $O_i = V_i$ en otro caso. Entonces $v \in O$ y el conjunto Oh^{-1} es una vecindad de x^{-1} en (A, σ). Como $x \in \overline{H} \subseteq \overline{H}^\sigma$, y por nuestra hipótesis $\overline{H}^\sigma$ es un subgrupo de A, tenemos que $x^{-1} \in \overline{H}^\sigma$. Así $Oh^{-1} \cap H \neq \emptyset$, y entonces $O \cap H \neq \emptyset$. Así, $e \in OH$ y $x^{-1}OH$ es una vecindad abierta de x^{-1} en (A, σ). Como $x^{-1} \in \overline{H}^\sigma$, tenemos que $x^{-1}OH \cap H \neq \emptyset$ o equivalentemente, $x^{-1}O \cap H \neq \emptyset$. De aquí,

$$\emptyset \neq x^{-1}V \cap H \subseteq x^{-1}U \cap H.$$

Por ello $x^{-1} \in \overline{H}$.
Ahora supongamos que la topología σ coincide con la topología de A. Esto significa que A_i es un grupo topológico para cada $i \in J$. Consideramos el elemento $h^{-1} = (v_1^{-1}x_1^{-1}, \ldots, v_n^{-1}x_n^{-1})$. Si $i \notin J$, entonces $h_i^{-1} = x_i^{-1} \in x_i^{-1}U_i$. Si $i \in J$, usando la simetría de V_i y el hecho de que $x_i V_i x_i^{-1} \subseteq U_i$, tenemos que

$$h_i^{-1} = v_i^{-1}x_i^{-1} = x_i^{-1}(x_i v_i^{-1} x_i^{-1}) \in x_i^{-1}U_i.$$

Por ello $h^{-1} \in x^{-1}U$. Como $x^{-1}U \cap H \neq \emptyset$, tenemos que $x^{-1} \in \overline{H}$. Concluimos que $\overline{H}$ es un subgrupo de A. □

PROPOSICIÓN 4.4.2. *Sea H subgrupo de un grupo casi topológico G. Entonces $\overline{H}$ es subgrupo de G.*

DEMOSTRACIÓN. Ésta es la versión del lema 4.4.1 para un solo factor. □

Los lemas 4.4.3 y 4.4.4 que se prueban a continuación serán usados para demostrar que las cerraduras de subgrupos de productos finitos de grupos casi topológicos son subgrupos.

LEMA 4.4.3. *Sea H un subgrupo de $G = G_1 \times G_2$, donde G_1 es un grupo casi topológico y G_2 es un grupo topológico. Entonces $\overline{H}$ es subgrupo de G.*

DEMOSTRACIÓN. Para $i = 1, 2$, sea $(\tau_i, \gamma_i, \mathcal{B}_i)$ una estructura para G_i, con $\tau_2 = \gamma_2$. Sea H un subgrupo de G. Si existe una topología $\sigma \in \mathcal{R}$ estrictamente más débil que la topología de G, entonces $\sigma = \gamma_1 \times \tau_2$ es una topología de grupo topológico. Como en grupos topológicos las cerraduras de subgrupos son subgrupos, concluimos por el lema 4.4.1 que $\overline{H}$ es subgrupo de G. $\square$

LEMA 4.4.4. *Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia de grupos casi topológicos y A_{n+1} cualquier grupo topológico. Entonces el producto $G = \prod_{i=1}^{n+1} A_i$ es un grupo-SP.*

DEMOSTRACIÓN. Procedemos por inducción sobre n. Para $n = 1$ el enunciado se sigue del lema 4.4.3.
Ahora supongamos que la proposición es válida para cada entero positivo $k < n$. Sea $G = \prod_{i=1}^{n+1} A_i$, donde (A_{n+1}, τ_{n+1}) es un grupo topológico y los demás factores son grupos casi topológicos con estructuras $(\tau_i, \gamma_i, \mathcal{B}_i)$, para $i = 1, \ldots, n+1$, con $\tau_{n+1} = \gamma_{n+1}$. Sea $\tau = \prod_{i=1}^{n+1} \tau_i$. Cualquier topología $\sigma \in \mathcal{R}$ estrictamente más débil que τ es la topología de un producto de menos que n grupos casi topológicos por un grupo topológico. Por la hipótesis de inducción, las cerraduras de subgrupos de (G, σ) son subgrupos de G, y la conclusión se sigue del lema 4.4.1. $\square$

Nuevamente el caso de los productos finitos es un paso importante para la prueba del teorema 4.4.6.

PROPOSICIÓN 4.4.5. *Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de grupos casi topológicos. Entonces el grupo $G = \prod_{i=1}^n A_i$ es un grupo-SP.*

DEMOSTRACIÓN. G es topológicamente isomorfo a $G \times \{e\}$, donde $\{e\}$ es un grupo topológico consistente en un punto. La conclusión se sigue de la proposición 4.4.4. $\square$

El siguiente teorema, nuestro resultado principal en esta sección, es consecuencia de la proposición 4.4.5:

TEOREMA 4.4.6. *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos casi topológicos. Entonces el producto $G = \prod_{i \in I} A_i$ es un grupo-SP.*

DEMOSTRACIÓN. Sea H un subgrupo de G. Sea $x \in (cl_G H)^{-1}$. Debemos probar que $x \in cl_G H$. Sea $U = \prod_{i \in I} U_i$ una vecindad abierta básica de x en G. Supongamos que $U \neq G$. Existe un subconjunto finito F de I tal que $U_i = A_i$ para cada $i \in I \setminus F$. Sea $K = \prod_{i \in F} A_i$ y consideremos la proyección $p : G \to K$. Como p es un homomorfismo, $p(H)$ es un subgrupo de K, y como K es un producto finito de grupos casi topológicos, $cl_K(p(H))$ es un subgrupo de K, por la proposición 4.4.5. El elemento $p(x)$ pertenece a $cl_K(p(H))$, pues

$$p(x) \in p((cl_G H)^{-1}) = p(cl_G H)^{-1} \subseteq cl_K(p(H))^{-1} = cl_K(p(H)).$$

Como p es abierta, $p(U) \in \mathcal{N}_K(p(x))$, así $p(U) \cap p(H) \neq \emptyset$. Esto implica que $U \cap H \neq \emptyset$. Por ello $x \in cl_G(H)$. Concluimos que $cl_G(H)$ es un subgrupo de G. $\square$

PROPOSICIÓN 4.4.7. *Cualquier subgrupo discreto de un producto de grupos casi topológicos es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un producto de grupos casi topológicos y H un subgrupo discreto de G. Supongamos que la conclusión del corolario es falsa, esto es, que H no es cerrado. Sea $x \in \overline{H} \setminus H$. Elegimos vecindades abiertas U y V de la identidad e de G tales que $U \cap H = \{e\}$ y $V^2 \subseteq U$. Como $x \in \overline{H}$, la vecindad abierta xV de x contiene un elemento $xv \in H$, para alguna $v \in V$. Por el teorema 4.4.6, la cerradura $\overline{H}$ de H en G es subgrupo de G, entonces $x^{-1} \in \overline{H}$. El grupo G es T_1 por ser producto de grupos T_1. Por ser G un grupo T_1 y $v \neq e$, el conjunto $Vx^{-1} \setminus \{v^{-1}x^{-1}\}$ es una vecindad abierta de x^{-1} en G. Elegimos $v' \in V$ tal que $v'x^{-1} \in (Vx^{-1} \setminus \{v^{-1}x^{-1}\}) \cap H$. Entonces $v'v \in V^2 \cap H \subseteq U \cap H$, y $v'v \neq e$. Esta contradicción completa la demostración. □

Del teorema 4.4.6 y adaptando la demostración del corolario 3.4 en [**18**], obtenemos lo que sigue:

COROLARIO 4.4.8. *Sea $f : G \to H$ un epimorfismo continuo y abierto, donde G es un producto arbitrario de grupos casi topológicos y H es un grupo semitopológico. Entonces H es un grupo paratopológico y la cerradura de cualquier subgrupo de H es un subgrupo de H.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 4.4.6, la cerradura de cualquier subgrupo de G es un subgrupo de G. De la proposición 3.3 de [**18**] se sigue que la cerradura de cualquier subgrupo de H es un subgrupo de H. Probaremos ahora que H es un grupo paratopológico. Sea U una vecindad abierta de la identidad e_H de H. Entonces $W = f^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de la identidad e del grupo paratopológico G. Entonces existe una vecindad abierta O de e en G tal que $O^2 \subseteq W$. Claramente $V = f(O)$ es una vecindad abierta de la identidad en H, y tenemos que $V^2 = f(O^2) \subseteq f(W) = U$. Hemos demostrado que $V^2 \subseteq U$, de aquí se sigue que H es un grupo paratopológico. □

La proposición 4.4.2 y el teorema 4.4.6 no pueden extenderse a la clase más amplia de los grupos paratopológicos saturados, como se muestra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 4.4.9. *Existe un grupo paratopológico saturado G_1 y un subgrupo H de G_1 tal que $cl(H)$ no es subgrupo de G_1.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbb{N}^+$ el conjunto de los enteros no negativos. En el grupo $G = \mathbb{Z}^\omega$, la familia $\mathcal{V} = \left\{\{0\}^k \times \mathbb{N}^{\omega\setminus k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ es una base local en el neutro e_G para una topología de grupo paratopológico en G. El subconjunto $A = \{a_0 + a_n : n \in \mathbb{N}\}$ de G, donde a_i es el punto con la i-ésima coordenada igual a 1 y las otras coordenadas igual a 0, para $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, genera un subgrupo discreto H de G. Se prueba en el ejemplo 1.4.17 de [3] que $cl_G H$ no es subgrupo de G. La función identidad $G \to \mathbb{Z}^\omega$ es un homomorfismo continuo de grupos, donde $\mathbb{Z}$ es discreto y $\mathbb{Z}^\omega$ tiene la topología producto usual. Entonces la reflexión de G es de Hausdorff. Por el corolario 3 de [**4**], G es un subgrupo cerrado de un grupo paratopológico saturado G_1. El conjunto $cl_{G_1}(H)$ no es subgrupo de G_1. De lo contrario, como G es cerrado en G_1, $cl_G H = cl_{G_1} H$ sería un subgrupo de G. □

4.5. Propiedades comunes en G y $\hat{G}$

En esta sección probamos, para algunas propiedades $\mathcal{P}$, que un grupo casi topológico G satisface $\mathcal{P}$ si y sólo si el grupo topológico subyacente $\hat{G}$ también satisface $\mathcal{P}$.

Proposición 4.5.1. *Sea G un grupo casi topológico con grupo topológico subyacente $\hat{G}$. Entonces G es precompacto si y sólo si $\hat{G}$ es precompacto.*

Demostración. Supongamos que G es precompacto. Como la topología de G es más fina que la de $\hat{G}$, el grupo $\hat{G}$ es precompacto. Supongamos ahora que $\hat{G}$ es precompacto. Podemos considerar que G no es discreto, pues de lo contrario no habría nada que probar. Sean $\mathcal{B}$ una base local en el neutro e de G que satisface la parte (b) de la definición 4.1.1 y $U \in \mathcal{B}$. Elegimos un elemento arbitrario $x \in \widetilde{U} = U \setminus \{e\}$ y sea $V = x^{-1}\widetilde{U}$. El conjunto V es una vecindad abierta de e en el grupo precompacto $\hat{G}$. Sea K un subconjunto finito de $\hat{G}$ tal que $KV = G$ y $VK = G$. Para el conjunto finito $F = K \cup Kx^{-1}$, tenemos que $G = xG = xVK = \widetilde{U}K \subseteq UF$, y $G = KV = Kx^{-1}xV = Kx^{-1}\widetilde{U} \subseteq FU$. Así $G = UF$ y $G = FU$. Concluimos que G es precompacto. □

Diremos que el índice de estrechez izquierdo de un grupo paratopológico G es menor o igual que un cardinal infinito $\mathfrak{m}$, y escribiremos $In_l(G) \leq \mathfrak{m}$, si para cualquier vecindad U del neutro de G existe un subconjunto T de G, de cardinalidad no mayor que $\mathfrak{m}$, tal que $TU = G$. El mínimo cardinal $\mathfrak{m} \geq \omega$ tal que $In_l(G) \leq \mathfrak{m}$ es llamado *índice de estrechez izquierdo* de G. De manera semejante se define el *índice de estrechez derecho* $In_r(G)$ de G. El *índice de estrechez* $In(G)$ de G se define así: $In(G) = In_l(G) \cdot In_r(G)$.

Proposición 4.5.2. *Cada grupo casi topológico G satisface $In_l(G) = In_l(\hat{G})$ y $In_r(G) = In_r(\hat{G})$, donde $\hat{G}$ es el grupo topológico subyacente en G.*

Demostración. Si G es discreto, entonces $G = \hat{G}$ y no hay nada que probar. Supongamos que G no es discreto. Como la topología de $\hat{G}$ es más débil que la topología de G, se tiene que $In_l(\overline{G}) \leq In_l(G)$. Consideremos ahora una base local $\mathcal{B}$ del neutro e de G compatible con $\hat{G}$, una vecindad arbitraria U de e en G y $V \in \mathcal{B}$ con $V \subseteq U$. Como G no es discreto, podemos elegir un elemento $v \in \widetilde{V}$. El conjunto $v^{-1}\widetilde{V}$ es una vecindad abierta de e en $\hat{G}$. Por la definición de índice de estrechez izquierdo existe un subconjunto T de G con $|T| \leq In_l(\hat{G})$ tal que $Tv^{-1}\widetilde{V} = G$. El conjunto $S = Tv^{-1}$ tiene la misma cardinalidad que T y se tiene que $G = S\widetilde{V} \subseteq SV \subseteq SU$, de donde $G = SU$. Se sigue que $In_l(G) \leq In_l(\hat{G})$. Concluimos que $In_l(G) = In_l(\hat{G})$. De manera similar se obtiene que $In_r(G) = In_r(\hat{G})$. □

Corolario 4.5.3. *Cada grupo casi topológico G satisface $In_l(G) = In(G) = In_r(G)$.*

Demostración. Sea G un grupo casi topológico con grupo topológico subyacente $\hat{G}$. Las vecindades simétricas abiertas del neutro forman una base local de éste en cualquier grupo topológico. De aquí se obtiene que $In_l(\hat{G}) = In(\hat{G}) = In_r(\hat{G})$. La conclusión se sigue de la proposición 4.5.2. □

La propiedad de Baire se comporta de manera similar a la precompacidad en los grupos casi topológicos:

PROPOSICIÓN 4.5.4. *Un grupo casi topológico G es de Baire si y sólo si el grupo topológico subyacente $\hat{G}$ es de Baire.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que G no es discreto. La propiedad básica que vamos a usar es que los grupos G y $\hat{G}$ tienen los mismos conjuntos densos en ninguna parte. En efecto, sean A un conjunto denso en ninguna parte en G y U un conjunto abierto no vacío en $\hat{G}$. Entonces U es abierto en G, existe entonces un conjunto abierto no vacío V en G tal que $V \subseteq U \setminus A$. Tomemos un elemento $x \in V$. Como el grupo G es casi topológico, podemos encontrar una vecindad abierta W del neutro e en G tal que $\widetilde{W} = W \setminus \{e\}$ es abierto en $\hat{G}$ y $xW \subseteq V$. Entonces $O = x\widetilde{W}$ es un conjunto abierto no vacío en $\hat{G}$ que satisface $O \subseteq U \setminus A$. Por lo tanto A es denso en ninguna parte en $\hat{G}$.
Recíprocamente, supongamos que B es un conjunto denso en ninguna parte en $\hat{G}$ y U un conjunto abierto no vacío en G. Como en la argumentación previa, sean $x \in U$ y V una vecindad abierta de e en G tal que $xV \subseteq U$ y el conjunto $\widetilde{V} = V \setminus \{e\}$ es abierto en $\hat{G}$. Entonces $x\widetilde{V}$ es un conjunto abierto no vacío en $\hat{G}$, de tal manera que existe un conjunto abierto no vacío W en $\hat{G}$ tal que $W \subseteq x\widetilde{V} \setminus B$. Entonces W es abierto en G y $W \subseteq U \setminus B$, de aquí se sigue que B es denso en ninguna parte en G.
Finalmente, como las familias de conjuntos densos en ninguna parte coinciden en G y $\hat{G}$, concluimos que G es de Baire si y sólo si $\hat{G}$ lo es. □

Diremos que una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es una familia *celular* si sus elementos son ajenos dos a dos. La *celularidad* $c(X)$ de un espacio topológico X es el menor cardinal infinito $\mathfrak{m}$ tal que cualquier familia celular $\mathcal{U}$ de X tiene cardinalidad menor o igual que $\mathfrak{m}$.

La *densidad* de un espacio topológico X es el menor cardinal infinito $\mathfrak{m}$ tal que X tiene un subconjunto denso D con $|D| \leq \mathfrak{m}$.

Una π-*base* en un espacio topológico X es una familia $\mathcal{V}$ de abiertos no vacíos de X tal que para cada abierto U no vacío de X existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq U$.

El π-*peso* $\pi w\,(X)$ de un espacio topológico X es el menor cardinal infinito $\mathfrak{m}$ tal que X tiene una π-base $\mathcal{V}$ con $|\mathcal{V}| \leq \mathfrak{m}$.

Dada una base local $\mathcal{B}$ compatible con $\hat{G}$ en el neutro de un grupo casi topológico no discreto G, por la definición de grupo casi topológico, cada elemento U de $\mathcal{B}$ contiene al abierto $\widetilde{U}$ no vacío de $\hat{G}$. Esto implica que los conjuntos abiertos no vacíos de $\hat{G}$ forman una π-base para G. El hecho de que una familia de abiertos de $\hat{G}$ sea una π-base para G vuelve inmediata la prueba de la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.5.5. *Para cualquier grupo casi topológico G no discreto con grupo topológico subyacente $\hat{G}$ se cumple lo siguiente:*

a) $c(G) = c(\hat{G})$,
b) $d(G) = d(\hat{G})$,
c) $\pi w(G) = \pi w(\hat{G})$.

Demostración. (a) Toda familia celular $\mathcal{U}$ de abiertos en $\hat{G}$, es también una familia celular de abiertos en G. Por lo tanto $c\left(\hat{G}\right) \leq c\left(G\right)$. Como los abiertos no vacíos de $\hat{G}$ forman una π-base para G, dada cualquier familia celular $\mathcal{U}$ de abiertos en G, existe una familia celular $\mathcal{U}'$ en $\hat{G}$ tal que $|\mathcal{U}| = |\mathcal{U}'|$. De aquí que $c\left(G\right) \leq c\left(\hat{G}\right)$. Concluimos que $c(G) = c(\hat{G})$.

(b) Por ser la topología de $\hat{G}$ más débil que la de G, cualquier conjunto denso D en G es también denso en $\hat{G}$, por lo tanto $d(\hat{G}) \leq d(G)$. Cualquier subconjunto denso D en $\hat{G}$ es también denso en G, por ser los abiertos no vacós de $\hat{G}$ una π-base para G. Por lo tanto $d(G) \leq d(\hat{G})$. Concluimos que $d(G) = d(\hat{G})$.

(c) Dada una π-base $\mathcal{V}$ de G, como los elementos de $\mathcal{V}$ no son vacíos, para cada elemento $V \in \mathcal{V}$ exixte $x \in V$ y un abierto básico $U \in \mathcal{B}$ tal que $xU \subseteq V$. Como G no es discreto, el conjunto $x\widetilde{U}$ es un abierto no vacío en $\hat{G}$. Definimos $U_V = x\widetilde{U}$. Se tiene que el conjunto $\mathcal{U} = \{U_V : V \in \mathcal{V}\}$ es una π-base para $\hat{G}$, con $|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{V}|$. Por lo tanto $\pi\omega\left(\hat{G}\right) \leq \pi\omega\left(G\right)$. Por otra parte, cualquier π-base para $\hat{G}$ es una π-base para G, de donde $\pi\omega\left(G\right) \leq \pi\omega\left(\hat{G}\right)$. $\square$

CAPÍTULO 5

Grupos tenuemente compactos

5.1. Semirregularización

En este trabajo, por espacio *regular* entendemos un espacio topológico X tal que para cada $x \in X$ y cada vecindad abierta U de x existe una vecindad abierta V de x tal que $\overline{V} \subseteq U$, o equivalentemente, para cada subconjunto F cerrado de X y $x \notin F$, existen conjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $x \in U$, y $F \subseteq V$. Un espacio será llamado T_3 si es regular y T_1.

Sea X un espacio topológico y $U \subseteq X$. Decimos que U es un subconjunto *abierto regular* de X si $U = int\,\overline{U}$. Un espacio topológico es *semirregular* si su topología tiene una base de conjuntos regulares. La familia de todos los conjuntos abiertos regulares de X es base para una topología ρ en X más débil que la topología de X. Denotamos al espacio topológico (X, ρ) como rX; en general, el espacio rX es llamado la *semirregularización* de X, pues rX es un espacio semirregular. Para cada grupo paratopológico G, el espacio rG es un grupo paratopológico regular (ver [**14**, Proposition 1.5]). Dado que nuestro interés se centra principalmente en los grupos paratopológicos, nos referiremos a rG como la *regularización* de G.

DEFINICIÓN 5.1.1. *Un espacio topológico X es tenuemente compacto si toda familia localmente finita de abiertos de X es finita.*

Un espacio X es pseudocompacto si es de Tychonoff y cada función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada. En la clase de los espacios de Tychonoff los conceptos de pseudocompacidad y compacidad tenue coinciden.

El lema 5.1.2 es conocido. Los lemas 5.1.3 y 5.1.4 aparecen en [**15**].

LEMA 5.1.2. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es tenuemente compacto si y sólo si rX es tenuemente compacto.*

Sea G un grupo paratopológico y $\mathcal{N}$ la familia de todas las vecindades abiertas de el elemento neutro e de G. Entonces el conjunto $H = \bigcap_{U \in \mathcal{N}} (U \cap U^{-1})$ es un subgrupo invariante de G, es decir, $xHx^{-1} = H$ para cada $x \in G$. Denotemos como $T_0(G)$ al grupo paratopológico cociente G/H y sea $\pi \colon G \to G/H$ el homomorfismo cociente. Es fácil verificar que $U = \pi^{-1}\pi(U)$, para cada conjunto abierto $U \subseteq G$ y que el grupo $T_0(G)$ es un espacio T_0 (ver [**15**, sección 5]).

LEMA 5.1.3. *Un grupo paratopológico G es tenuemente compacto si y sólo si $T_0(G)$ es tenuemente compacto.*

LEMA 5.1.4. *Para cada grupo paratopológico G tenuemente compacto, el grupo $T_0(rG)$ es un grupo topológico pseudocompacto.*

LEMA 5.1.5. *Sea X un espacio e $i_X\colon X \to rX$ la función identidad de X sobre la semirregularización de X. Si D es un subespacio denso de un espacio X, entonces rD es naturalmente homeomorfo al subespacio $i_X(D)$ de rX.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la operación de semirregularización que las familias de conjuntos abiertos regulares coinciden en X y rX. Como D es denso en X, obtenemos la conclusión deseada. □

COROLARIO 5.1.6. *Un subconjunto denso D de un espacio X es tenuemente compacto como subespacio de X si y sólo si D es tenuemente compacto como subespacio de rX.*

LEMA 5.1.7. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua abierta de un espacio X sobre un espacio Y tenuemente compacto, y supongamos que $f^{-1}f(U) = U$ para cada conjunto abierto U de X. Entonces X es tenuemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U}$ una familia localmente finita de conjuntos abiertos en X. Afirmamos que $\mathcal{U}' = \{f(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia localmente finita de conjuntos abiertos en Y. En efecto, como f es abierta, $\mathcal{U}'$ es una familia de conjuntos abiertos en Y. Sea $y \in Y$. Elegimos $x \in f^{-1}(y)$ y una vecindad abierta V de x en X que intersecta sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Supongamos que $f(V)$ intersecta a $f(U)$ para alguna $U \in \mathcal{U}$. Entonces $V \cap U = f^{-1}f(V) \cap f^{-1}f(U) \neq \emptyset$. De ahí que la vecindad abierta $f(V)$ de y intersecta sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{U}'$. Entonces $\mathcal{U}'$ es localmente finita, y como Y es tenuemente compacto, $\mathcal{U}'$ es finita. Usando que para cada conjunto abierto U de X se tiene la igualdad $f^{-1}f(U) = U$, concluimos que $\mathcal{U}$ es finita. Por lo tanto X es tenuemente compacto. □

LEMA 5.1.8. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua abierta de un espacio X sobre un espacio Y tenuemente compacto. Supongamos que $f^{-1}f(U) = U$ para cada conjunto abierto U de X, y que D es un subespacio denso de X. Entonces la función $g = f{\restriction}_D\colon D \to f(D)$ es abierta y $g^{-1}g(V) = V$ para cada conjunto abierto V de D.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente g es continua. Sea $V = U \cap D$ un conjunto abierto en D, con U abierto en X. Entonces $g(V) = f(U \cap D) \subseteq f(U) \cap f(D)$. Sea $y \in f(U) \cap f(D)$, elegimos $x \in f^{-1}(y) \cap D$. Como $f^{-1}f(U) = U$, tenemos que $f^{-1}(y) \subseteq U$. Entonces $x \in U \cap D$, y $y \in f(U \cap D) = g(V)$. Concluimos que $g(V) = f(U) \cap f(D)$ es abierto $f(D)$.
Ahora probamos que $g^{-1}g(V) = V$ para cada conjunto abierto V en D. Sea U un conjunto abierto en X tal que $V = U \cap D$. Entonces $g^{-1}g(V) = f^{-1}f(V) \cap D \subseteq f^{-1}f(U) \cap D = U \cap D = V$. Como $V \subseteq g^{-1}g(V)$, concluimos que $g^{-1}g(V) = V$. □

COROLARIO 5.1.9. *Un subconjunto denso D de un grupo paratopológico G es tenuemente compacto si el subespacio $\pi(D)$ de $T_0(G)$ es tenuemente compacto, donde $\pi\colon G \to T_0(G)$ es el homomorfismo cociente.*

DEMOSTRACIÓN. El homomorfismo π es abierto y $U = \pi^{-1}\pi(U)$ para cada conjunto abierto U en G. La conclusión deseada se sigue de los lemas 5.1.7 y 5.1.8. □

Un subespacio D de un espacio X es G_δ-*denso* en X si su intersección con cada conjunto-G_δ no vacío en X es distinta del vacío.

PROPOSICIÓN 5.1.10. *Sea G un grupo paratopológico tenuemente compacto y D un subconjunto G_δ-denso de G. Entonces D es tenuemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que D es tenuemente compacto si y sólo si rD es tenuemente compacto. Por el lema 5.1.5, rD es homeomorfo a D considerado como subespacio de rG. Entonces, por el corolario 5.1.9, D es tenuemente compacto si $\pi(D)$ es un subespacio tenuemente compacto de $T_0(rG)$. Por el lema 5.1.4, $T_0(rG)$ es un grupo topológico pseudocompacto, y claramente $\pi(D)$ es un subconjunto G_δ-denso de $T_0(rG)$. Por el corolario 6.6.3 en [**2**], $\pi(D)$ es tenuemente compacto. Concluimos que D es tenuemente compacto. □

COROLARIO 5.1.11. *Cada subgrupo G_δ-denso de un grupo paratopológico tenuemente compacto es tenuemente compacto.*

5.2. κ-normalidad perfecta

Un conjunto $A \subseteq X$ es un *conjunto-cero* en un espacio X si existe una función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $A = f^{-1}(0)$. Un subconjunto C de un espacio X es *cerrado regular* en X si $C = \overline{int\, C}$.

DEFINICIÓN 5.2.1. *Un espacio X es perfectamente κ-normal si cada subconjunto cerrado regular de X es un conjunto-cero en X.*

Un subespacio A de un espacio X está *z-inmerso* en X si cada conjunto-cero en A es la intersección de A con un conjunto-cero de X, es decir, B es un conjunto-cero de A si y sólo si $B = A \cap C$, con C un conjunto-cero de X. En [**5**], Blair prueba que un espacio X es perfectamente κ-normal si y sólo si cada subconjunto denso de X está z-inmerso en X.

El siguiente lema se sigue de la definición de semirregularización.

LEMA 5.2.2. *Cada subconjunto cerrado regular en un espacio X es cerrado regular en rX.*

LEMA 5.2.3. *Sea C un conjunto cerrado regular en un grupo paratopológico G. Entonces $\pi(C)$ es cerrado regular en T_0G, donde $\pi\colon G \to T_0(G)$ es el homomorfismo cociente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea C un conjunto regular cerrado en G. Probamos primero que $C = \pi^{-1}\pi(C)$. Es suficiente mostrar que $CH \subseteq C$, donde H es el nucleo de π. Sea $x = ch \in CH$, con $c \in C$, $h \in H$ y $U \in \mathcal{N}(e)$. Entonces $xU \in \mathcal{N}(x)$. Tenemos que $xU = chU \in \mathcal{N}(c)$. Como $C = \overline{int\, C}$, tenemos que $xU \cap int\, C = chU \cap int\, C \neq \emptyset$. Así $x \in \overline{int\, C} = C$. Por ello $C = \pi^{-1}\pi(C)$.
Usando esta propiedad de π y el hecho de que π es abierta y continua, concluimos que $\pi(C)$ es un conjunto cerrado regular en in $T_0(G)$. □

El siguiente lema es conocido.

LEMA 5.2.4. *Cada grupo topológico pseudocompacto es un espacio perfectamente κ-normal.*

Demostración. Se sigue del [**2**, Corolario 5.3.29] que cada grupo topológico compacto es un espacio perfectamente κ-normal. La compleción de Raĭkov ϱG de un grupo topológico pseudocompacto G es un grupo topológico compacto, y por ello es perfectamente κ-normal. También lo es G, como subespacio denso de ϱG. $\square$

Teorema 5.2.5. *Cada grupo paratopológico tenuemente compacto es perfectamente κ-normal.*

Demostración. Sea G un grupo paratopológico tenuemente compacto y C un conjunto regular cerrado en G. Por los lemas 5.1.4, 5.2.2, 5.2.3, y 5.2.4, $\pi(C)$ es un conjunto regular cerrado en el grupo topológico $T_0\,(G)$, que es perfectamente κ-normal, donde $\pi\colon G \to T_0 G$ es la función cociente. Entonces, $\pi(C)$ es un conjunto-cero en $T_0 G$. Se sigue que $C = \pi^{-1}\pi(C)$ es un conjunto-cero en G. Concluimos que G is perfectamente κ-normal. $\square$

Proposición 5.2.6. *Supongamos que cada subgrupo cíclico de un grupo paratopológico tenuemente compacto G de Hausdorff es precompacto. Entonces G es un grupo topológico.*

Demostración. Probamos primero que G es topológicamente periódico. Supongamos que $x \in G$ y U es una vecindad abierta del neutro e en G. Si x tiene orden finito no hay nada que probar. Podemos suponer que el subgrupo cíclico $H = \langle x \rangle$ de G es infinito. Como H es precompacto, existe un subconjunto finito F de H tal que $H = F \cdot V$, donde $V = U \cap H$. Como F es finito, existe un conjunto finito $C \subset \mathbb{Z}$ tal que $F = \{x^n : n \in C\}$. Sea $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $k > n$ para cada $n \in C$. Por la igualdad $H = F \cdot V$, existen $n \in C$ y $m \in \mathbb{Z}$ tales que $x^k = x^n x^m$. Entonces $k = n + m$, y de $k > n$ se sigue que $m = k - n > 0$. De aquí $x^m \in V \subseteq U$ y el grupo G es topológicamente periódico.

Finalmente, por la proposición 5 en [**15**], cada grupo paratopológico tenuemente compacto topológicamente periódico es un grupo topológico. $\square$

CAPÍTULO 6

Otro resultado

6.1. Introducción

En la sección 6.2 consideramos subconjuntos compactos de grupos paratopológicos y la acción de automorfismos internos sobre vecindades abiertas del neutro. Es sabido que para un subconjunto compacto (incluso precompacto) B de un grupo topológico G, y una vecindad arbitraria U del neutro e de G, existe una vecindad V de e tal que $bVb^{-1} \subseteq U$, para cada $b \in B$ [**2**, lema 3.7.7], . En el ejemplo 6.2.1 probamos que este hecho no es válido en la clase de los grupos paratopológicos de Hausdorff.

Recordemos que un grupo topológico (G, γ) es la reflexión del grupo paratopológico (G, τ) si γ es la mayor topología de grupo topológico en G contenida en τ.

6.2. Ejemplo

EJEMPLO 6.2.1. *Existe un grupo paratopológico saturado H de Hausdorff, un subconjunto compacto B de H, y una vecindad U del neutro e de H tal que ninguna vecindad V de e satisface $b^{-1}Vb \subseteq U$, para cada $b \in B$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $G = F^{(\omega)}$ la suma directa de ω copias del grupo libre F de dos generadores, x e y, y S el mínimo subsemigrupo de F que contiene al conjunto $\{1, x, y\}$, donde 1 es el neutro de F.

Continuamos como en la proposición 6 de [**3**]. Para cada $n \in \omega$, sea U_n el conjunto de los elementos z de G tales que $z(k) = 1$, para cada $k \leq n$, y $z(k) \in S$, para cada $k > n$. La familia $\mathcal{N} = \{U_n : n \in \omega\}$ satisface las condiciones de Pontryagin para una base de vecindades de la identidad e_G de G para una topología de grupo paratopológico τ es G (ver la proposición 2.1 de [**17**]). Es fácil verificar que la topología τ en G es de Hausdorff; en efecto, sean $z \neq e_G$ un elemento de G y $k = mín\{n \in \omega : z(n) \neq 1\}$. Los conjuntos zU_k y U_k son vecindades abiertas disjuntas de z y e_G, respectivamente. Entonces G es Hausdorff y la proposición 6 de [**3**] implica que la reflexión de G es de Hausdorff.

Para cada $n \in \omega$, sea b_n el elemento de G definido por $b_n(n) = x$, y $b_n(k) = 1$ si $k \neq n$. Sean $B' = \{b_n : n \in \omega\}$, y $B = B' \cup \{e_G\}$. Cada elemento de $\mathcal{N}$ contiene a todos los elementos de B, salvo un número finito. Entonces B es un subconjunto compacto de G.

Sea $n \in \omega$, y consideremos al elemento $z \in U_n$ definido así: $z(n+1) = y$ y $z(k) = 1$ para cada $k \neq n+1$. Tenemos que $t = b_{n+1}^{-1} z b_{n+1} \notin U_0$, ya que $t(n+1) = x^{-1}yx \notin S$. El elemento $n \in \omega$ era arbitrario, entonces no existe ninguna vecindad V de e_G en G tal que $b^{-1}Vb \subseteq U_0$ para cada $b \in B$.

Como G tiene reflexión de Hausdorff, [**4**, corolario 3] implica que el grupo G puede ser sumergido como subgrupo en un grupo paratopológico saturado H de Hausdorff.

Supongamos que la conclusión del ejemplo no se cumple. Elegimos una vecindad U del neutro e en H tal que $U \cap G = U_0$. Entonces para alguna vecindad abierta V de e, $b^{-1}Vb \subseteq U$, para cada $b \in B$. Sea $V_0 = V \cap G$. Claramente B y V_0 son subconjuntos de G y se sigue que $b^{-1}V_0b \subseteq U \cap G = U_0$, para cada $b \in B$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que no existen vecindades abiertas V de e in H tales que $b^{-1}Vb \subseteq U$ para cada $b \in B$. □

No queda claro que se pueda refinar el ejemplo 6.2.1 eligiendo al grupo H precompacto. Nótese que cada grupo paratopológico precompacto es saturado [**13**].

CAPÍTULO 7

Conclusiones y perspectivas

7.1. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado algunos resultados y contraejemplos que contribuyen a la teoría de los grupos paratopológicos, que ha comenzado a desarrollarse con mayor rapidez en la última década.

Se ha presentado la definición de la clase de los grupos-SP, que contribuye al estudio de las cerraduras de subgrupos en los grupos paratopológicos.

Hasta donde el autor sabe, todos los ejemplos de construcciones de grupos paratopológicos que no sean grupos-SP previos a este trabajo, fueron obtenidos al refinar la topología de un grupo topológico G declarando abierto a un subsemigrupo de G. Hemos verificado que el ejemplo 3.4.1, desarrollado por Ravsky [**15**] con otros fines, no es de este tipo.

Se han definido también los grupos casi topológicos, que forman una clase no productiva, cerrada bajo cocientes y bajo subgrupos. Se ha probado que los productos arbitrarios de los grupos casi topológicos son grupos-SP. También se ha probado que cualquier subgrupo de un producto arbitrario de grupos casi topológicos es saturado.

Hemos presentado un ejemplo para probar que los grupos saturados no son necesariamente grupos-SP.

En la clase de los grupos paratopológicos tenuemente compactos hemos probado que cualquier subespacio G_δ-denso de un grupo paratopológico tenuemente compacto es tenuemente compacto, en particular los subgrupos G_δ-densos de los grupos paratopológicos tenuemente compactos son tenuemente compactos. Hemos probado también que los grupos paratopológicos tenuemente compactos son perfectamente κ-normales, y que si cada subgrupo cíclico de un grupo paratopológico tenuemente compacto G de Hausdorff es precompacto, entonces G es un grupo topológico.

Finalmente en el capítulo 6 mostramos con un ejemplo que un lema que se usa en grupos topológicos para probar que todo grupo topológico precompacto es balanceado no se generaliza a los grupos paratopológicos.

7.2. Perspectivas

Dentro de nuestro trabajo en el doctorado un buen número de preguntas quedaron por responder. Por ejemplo:

Pregunta 7.2.1. *¿Es verdadera la igualdad $\chi(G) = \pi\chi(G) = \pi\chi(\hat{G}) = \chi(\hat{G})$ en grupos casi topológicos?*

Una clase $\mathcal{C}$ de grupos paratopológicos satisface la propiedad de tres espacios si para todo grupo paratopológico G y para todo subgrupo invariante cerrado N de G se cumple lo sguiente: Si N y el grupo cociente G/N están en $\mathcal{C}$ entonces G está en $\mathcal{C}$.

PREGUNTA 7.2.2. *¿La clase de los grupos casi topológicos satisface la propiedad de tres espacios?*

En el capítulo 6 mostramos que el lema 2.0.1 no se puede generalizar a los grupos paratopológicos.

PREGUNTA 7.2.3. *Si G es un grupo paratopológico precompacto, B es un subconjunto precompacto de G y U es una vecindad del neutro de G, ¿existe una vecindad V del neutro de G tal que para todo $b \in B$ se cumple $bVb^{-1} \subseteq U$?*

Sumario de definiciones

En esta sección concentramos las definiciones principales para su rápida localización.

Celularidad. La *celularidad* $c(X)$ de un espacio topológico X es el mínimo cardinal $\mathfrak{m} \geq \omega$ tal que toda familia celular $\mathcal{U}$ de abiertos de X tiene cardinalidad menor o igual que $\mathfrak{m}$.

Condensación. Cualquier función $f : X \to Y$ biyectiva y continua con X, Y espacios topológicos es llamada *condensación*.

Conjunto abierto regular. Un subconjunto U de un espacio topológico X es *abierto regular* si $U = int\overline{U}$.

Conjunto cero. Un conjunto $A \subseteq X$ es un *conjunto-cero* en un espacio X si existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $A = f^{-1}(0)$.

Conjunto cerrado regular. Un subconjunto C de un espacio topológico X es *cerrado regular* si $C = \overline{intC}$.

Conjunto independiente. Un subconjunto no vacío K de un grupo aditivo abeliano G con neutro 0 es *independiente* si para cualquier combinación lineal $n_1k_1 + \cdots + n_rk_r = 0$ se tiene $n_1k_1 = \cdots = n_rk_r = 0$, donde $n_1, \ldots, n_r$ son enteros y $k_1, \ldots, k_r \in K$.

Conjunto G_δ-denso. Un conjunto A de un espacio topológico X es *G_δ-denso* en X si la intersección de cualquier conjunto G_δ no vacío de X con A es distinta del vacío.

Densidad. La *densidad* $d\,(X)$ de un espacio X es el mínimo cardinal $\mathfrak{m} \geq \omega$ tal que X tiene un subconjunto denso de cardinalidad menor o igual que $\mathfrak{m}$

Espacio de Baire. Un espacio topológico X es de *Baire* si la intersección de cada familia numerable de abiertos densos en X es densa en X.

Espacio homogéneo. Un espacio topológico X es *homogéneo* si para cualquier par de puntos x, y de X existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

Espacio perfectamente κ-normal. Un espacio X es *perfectamente κ-normal* si cada subconjunto cerrado regular de X es un conjunto-cero en X.

Espacio primero numerable. Un espacio topológico es *primero numerable* si cada punto del espacio tiene una base local numerable.

Espacio pseudocompacto. Un espacio X es *pseudocompacto* si es de Tychonoff y cada función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada.

Espacio regular. Un espacio topológico X es regular si para cada cerrado F de X y $x \in X \setminus F$ existen abiertos ajenos U y V en X tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.

Espacio semirregular. Un espacio topológico X es *semirregular* si los conjuntos abiertos regulares de X forman una base para la topología de X.

Espacio tenuemente compacto. Un espacio topológico es *tenuemente compacto* si cada familia localmente finita de conjuntos abiertos de X es finita.

Familia celular. Una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es una familia *celular* si sus elementos son ajenos dos a dos.

Grupo casi topológico. Un grupo paratopológico (G, τ) es un *grupo casi topológico* si existe una base local en el neutro e de G y una topología γ de grupo topológico en G tales que:

a) $\gamma \subseteq \tau$, y
b) para cada $U \in \mathcal{B}$, el conjunto $\widetilde{U} = U \setminus \{e\}$ es abierto en (G, γ).

Grupo precompacto. Un grupo semitopológico G es *precompacto* si es a la vez precompacto izquierdo y derecho.

Grupo precompacto izquierdo (derecho). Un grupo topológico izquierdo (derecho) G es *precompacto izquierdo (derecho)* si para cada vecindad abierta U del neutro de G existe un subconjunto finito F de G tal que $FU = G$ ($UF = G$). Un grupo semitopológico G es *precompacto* si es a la vez precompacto izquierdo y derecho.

Grupo semitopológico. Un grupo con una topología es un *grupo semitopológico* si es topológico izquierdo y derecho.

Grupo saturado. Un grupo paratopológico G es *saturado* si para cada vecindad abierta U del neutro de G el conjunto $int(U^{-1})$ es no vacío.

Grupo-SP. Un grupo paratopológico G es un *grupo-SP* si la cerradura de cada subgrupo de G es un subgrupo de G.

Grupo topológico izquierdo (derecho). Un grupo con una topología es *topológico izquierdo (derecho)* si todas las traslaciones izquierdas (derechas) son continuas en G.

Grupo topológicamente periódico. Un grupo G con una topología es *topológicamente periódico* si para cada $x \in G$ y cada vecindad U del neutro de G existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in U$.

Índice de estrechez derecho. El *índice de estrechez derecho* $In_r(G)$ de un grupo paratopológico G es el mínimo cardinal infinito $\mathfrak{m}$ tal que para toda vecindad abierta U del neutro de G existe un subconjunto T de G, con $|T| \leq \mathfrak{m}$, tal que $UT = G$.

Índice de estrechez izquierdo. El *índice de estrechez izquierdo* $In_l(G)$ de un grupo paratopológico G es el mínimo cardinal infinito $\mathfrak{m}$ tal que para toda vecindad abierta U del neutro de G existe un subconjunto T de G, con $|T| \leq \mathfrak{m}$, tal que $TU = G$.

Índice de estrechez. El *índice de estrechez* $In(G)$ de un grupo paratopológico G es el producto de los índices de estrechez derecho e izquierdo de G. Esto es, $In(G) = In_r(G) \cdot In_l(G)$

π-base. Una *π-base* para un espacio X es una familia $\mathcal{V}$ de conjuntos abiertos no vacíos de X tal que cada abierto no vacío U de X contiene al menos a un elemento de $\mathcal{V}$.

π-peso. El *π-peso* $\pi w(X)$ de un espacio X es el mínimo cardinal infinito $\mathfrak{m}$ tal que X tiene una π-base de cardinalidad menor o igual que $\mathfrak{m}$.

Reflexión. La *reflexión* de un grupo paratopológico (G, τ) es el grupo topológico (G, σ), donde σ es la máxima topología de grupo topológico en G más débil que τ.

Subespacio z-inmerso. Un subespacio A de un espacio X está *z-inmerso* en X si cada conjunto-cero en A es la intersección de A con un conjunto-cero de X, es decir, B es un conjunto-cero de A si y sólo si $B = A \cap C$, con C un conjunto-cero de X.

Subsemigrupo. Un subconjunto no vacío S de un grupo G es un *subsemigrupo* de G si para todo par de elementos $x, y \in S$ se tiene que $xy \in S$.

Subgrupo invariante. Un subgrupo N de un grupo G con una topología es llamado *invariante* si para todo elemento $x \in G$ se tiene $x^{-1}Nx = N$. Es decir, los subgrupos invariantes son los que en el álgebra se conocen como subgrupos normales.

Traslaciones. Si G es un grupo con una topología y $g \in G$ entonces las funciones $\lambda_g : G \to G : \lambda_g(x) = gx$ y $\rho_g : G \to G : \rho_g(x) = xg$ son llamadas *traslación izquierda* y *traslación derecha* de G por g, respectivamente.

Bibliografía

[1] A.V. Arhangel'skii y E.A. Reznichenko, Paratopological and semitopological groups versus topological groups, Topology Appl. **151** (2005), 107–119.

[2] A.V. Arhangel'skii y M.G. Tkachenko, Topological groups and related structures, Atlantis Studies in Mathematics, Vol 1, Atlantis Press/World Scientific, Paris-Amsterdam, (2008).

[3] T. Banakh y S. Ravsky, Oscillator topologies on a paratopological group and related number invariants. Kyiv. Inst. Mat. NANU (2002), 140–152.

[4] T. Banakh y S. Ravsky, On subgroups of saturated or totally bounded paratopological groups, Algebra and Discrete Mathematics. 4 (2003) 1–20.

[5] R. L. Blair, Spaces in which special sets are z-embedded, Canad. J. Math. **28**:4 (1976), 673–690.

[6] N. Brand, Another note on the continuity of the inverse, Arch. Math. 39 (1982), 241–245.

[7] R. Ellis, A note on the continuity of the inverse, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 372–373.

[8] M. Fernández, On some classes of paratopological groups, Topology Proc. **40** (2012), 63–72.

[9] M. Fernández, M. Tkachenko, Subgroups of paratopological groups and feebly compact groups, Enviado, (2014).

[10] I.Y. Guran, Cardinal invariants of paratopological groups, II, Intern. Algebraic Conf. in Ukraine, -Kyiv- Vinnitsia, (1999) (in Ukrainian).

[11] Hernández, C., Condensations of Tychonoff universal topological algebras, Comment. Math. Univ. Carolin. 42 no. 3 (2001), 529-533.

[12] D. Montgomery, Continuity in topological groups, Bull. Amer. Soc., 42 (1936) 879–882.

[13] O.V. Ravsky, Paratopological groups I, Matematichni Studii, 16 (2001) 37–48.

[14] O. Ravsky, Paratopological groups, II, Matematychni Studii, **17** (2002) 93–101.

[15] O. Ravsky, Pseudocompact paratopological groups, arXiv:1003.5343 [Math. GN], September 2013.

[16] E.A. Reznichenko, Extensions of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups, Topol. Appl. 59 (1994), 233–244.

[17] S. Romaguera, M. Sanchis, M. Tkachenko, Free paratopological groups, Topology Proc. **27**:2 (2003), 613–640.

[18] M. G. Tkachenko, G. Delgadillo Piñón, and E. Rodríguez Cervera, A property of powers of the Sorgenfrey line, *Q & A in General Topology* **27**:1 (2009), 45–49.

[19] M. G. Tkachenko, A. H. Tomita, Cellularity in subgroups of paratopological groups, Topology Applications, por aparecer.

[20] W. Zelazko, A theorem on B_0 division algebras, Bull. Acad. Pol. Sci. **8** (1960), 373–375.